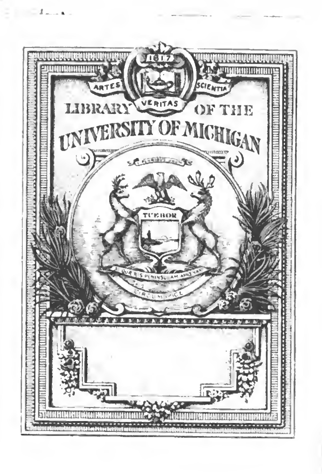
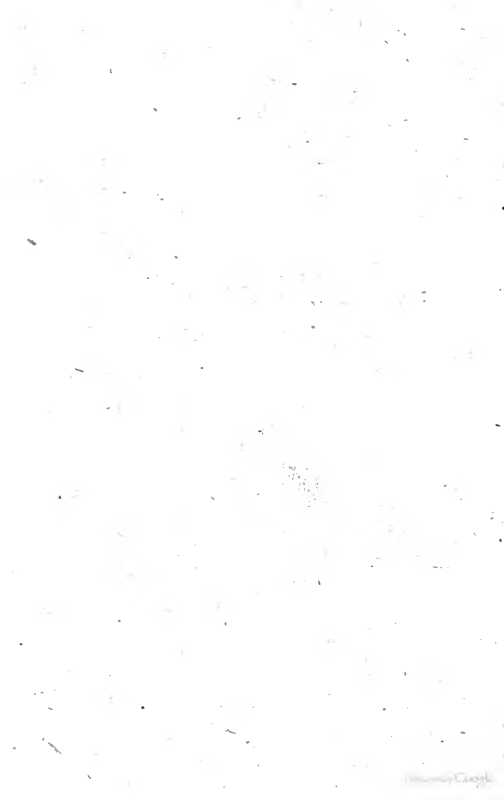



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR



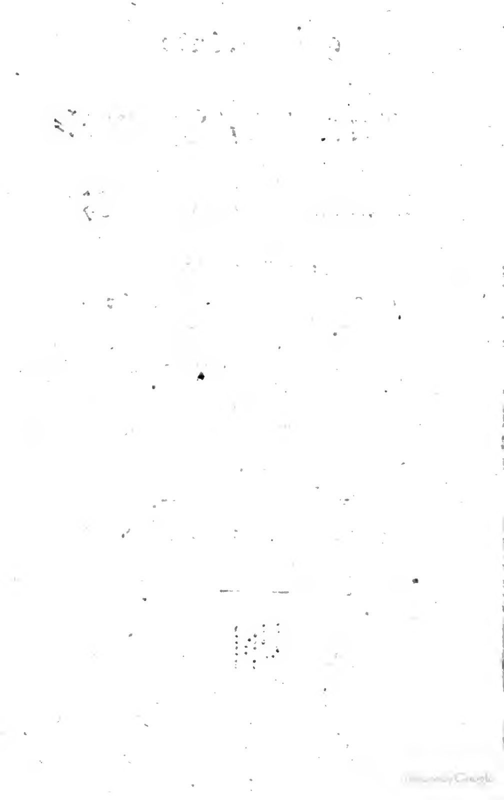
Erste Gründe
der
Differenzial-, Integral-
und
Variationsrechnung;

zum Unterricht
für Anfänger und andere Liebhaber
der Mathematik.

Entworfen
von

D. Joh. Karl Fischer,
Professor am Archigymnasio zu Dortmund.

Elberfeld 1811,
bey Heinrich Büschler.



Vorrede.

In unsern Zeiten wird auf mehreren Gymnasien und Lyceen die Mathematik zweckmäßiger und mit einem weit größeren Ernst, als sonst, getrieben, und schon dadurch hat diese Wissenschaft an Interesse gewonnen. Gerade in dieser Zeitperiode der Jugend müssen die Geisteskräfte derselben gehörig entwickelt, geläutert, und zum Selbstdenken vorbereitet werden, und hiezu eignet sich kein Theil in den philosophischen Wissenschaften mehr, als die Mathematik. Die gütige Natur scheint auch diese Wissenschaft vorzüglich zu diesem Zweck bestimmt zu haben, indem einem jeden die Fähigkeit verliehen ist, dieselbe am leichtesten und sichersten zu erlernen. Da überdem die Mathematik in den meisten und wichtigsten Geschäften

des menschlichen Lebens den größten Einfluß hat, so würde es selbst in dieser Hinsicht unverzeihlich seyn, wenn sie von der Jugend für jede künftige Bestimmung nicht mit dem größten Eifer erlernet würde. Sie wird jedem Menschen desto nützlicher werden, je tiefer er, selbst in den höhern Theil, eingedrungen ist. Um das Studium dieses wichtigen Theiles zu erleichtern und immer mehr zu befördern, habe ich mich entschlossen, die allgemeinsten Regeln desselben mit hinlänglichen Beyspielen kurz und deutlich zu entwerfen. Es schien mir eine solche kurze Anleitung zur richtigen Auffassung der höhern Rechenkunst ein Bedürfniß zu seyn. Weitere Ausführungen nebst den Anwendungen auf Geometrie findet man ausführlich in meinem Grundrisse der reinen höhern Mathematik. Ich hoffe, dem Anfänger sowohl, als auch jedem andern Liebhaber der Mathematik, der sich in der höhern Rechenkunst unterrichten will, durch diese kleine Schrift den Wahn zu benehmen, daß die Infinitesinalrechnung schwer sey.

Dortmund im Juny
1811.

Fischer.

Erste Gründe der Differenzialrechnung.

Erster Abschnitt.
Von den Differenzen der Functionen.

§. 1.

Eine jede Größe, mithin auch jede Zahl, kann nach Gefallen vermehrt und vermindert werden. Bey vielen mathematischen Aufgaben aber kommen nicht selten Größen vor, welche nur bis auf gewisse Grenzen, oft aber auch bis ins Unendliche wachsen oder abnehmen können. So wird z. B. eine Summe desto größer, je größer die zu addirenden Zahlen werden; es kann also die Summe unendlich wachsen, wenn die zu addirenden Größen unendlich wachsen. Wenn im Gegentheil in einem Kreise der eine Endpunkt des Durchmessers als Grenze bestimmt ist, so kann ein Theil desselben durch Zuwächse nicht größer werden, als der Durchmesser selbst ist, wenn er nicht nach vorausgesetzten Bedingungen über die andere Grenze der Peripherie hinausgehen soll; indessen kann es allerdings verstattet werden, diesen Theil nach Willkühr klein

und groß, nie aber größer, als der Durchmesser ist, anzunehmen. In diesen und andern ähnlichen Fällen nennt man solche Größen veränderliche Größen. Außer diesen veränderlichen Größen kommen aber auch bey den mathematischen Aufgaben noch andere Größen in Betrachtung, welche weder wachsen noch abnehmen können, mithin beständig den Werth behalten müssen, den sie einmal haben, wie z. B. der Halbmesser in einem Kreise, und diese Größen nennt man beständige Größen. Ein jeder Ausdruck, in welchem eine veränderliche Größe mit beständigen Größen auf irgend eine Art verbunden ist, heißt eine Function der veränderlichen Größe. So sind z. B. ax, $\frac{ax}{b}$, $\sqrt{(b + cx)}$, a^x u. s. lauter Functionen von x, wenn man die beständigen Größen mit den ersten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets a, b, c u. s. die veränderlichen mit den letzten x, y, z bezeichnet.

§. 2.

Da jede Function wenigstens eine veränderliche Größe enthalten muß, diese aber nach Gefallen wachsen und abnehmen kann, wenn dies auch nach den Bedingungen der Aufgabe nur bis auf eine gewisse Grenze möglich wäre: so erhellet ganz leicht, daß die Function selbst einen veränderten Werth erhalten müsse, wenn die veränderliche Größe um ein gewisses Stück wächst. Wenn z. B. in der Function $\frac{ax}{b}$ die veränderliche Größe x um das unbestimmte Stück Δx (dasselbe bloß als Zeichen betrachtet) zunimmt, so wird die Function diesen veränderten

Werth

Werth $\frac{a(x+\triangle x)}{b} = \frac{ax + a\triangle x}{b} = \frac{ax}{b} + \frac{a\triangle x}{b}$ erhalten, und der Zuwachs, welchen die Function bekommt, wird $\frac{a\triangle x}{b}$ seyn. Auf diese Art wird überhaupt eine jede Function, von welcher Beschaffenheit sie auch seyn mag, einen veränderten Werth erhalten, und der Zuwachs der Function wird jederzeit gefunden, wenn man von dem veränderten Werthe die Function selbst subtrahirt. Weil also jederzeit der Zuwachs einer Function mit dem Unterschiede zwischen der Function und ihrer Veränderung einerley ist, so pflegt man diesen Zuwachs gewöhnlich die Differenz zu nennen. Wäre y irgend einer Function von x gleich, z. B. $y = ax$: so muß nothwendig y einen veränderten Werth erhalten, wenn $x + \triangle x$ statt x in der Function gesetzt wird; dieser veränderte Werth von y sey y^1; demnach ist der Zuwachs oder die Differenz $= y^1 - y$, welche mit $\triangle y$ bezeichnet wird. Im vorigen Beyspiele ist also $y^1 = a(x + \triangle x) = ax + a\triangle x$, und $y^1 - y = \triangle y = ax + a\triangle x - ax = a\triangle x$.

Anmerk. Es ist bisher angenommen worden, daß $\triangle x$ allemal einen Zuwachs zu der veränderlichen Größe x bedeutet; allein es kann auch eine Abnahme derselben seyn, welche jederzeit durch das Zeichen — erkannt wird.

§. 3.

Weil die Erfindung der Differenz der Functionen einen wesentlichen Nutzen in der Lehre der Differenzialrechnung hat, so wird es nöthig seyn, von allen möglichen Functionen die Differenzen zu bestimmen. Es sey

 also

also y zuerst ein Aggregat aus mehreren veränderlichen Größen, z. B. $y = x + q + z$. Hier findet man die Differenz also; man setze $y + \triangle y$ statt y, $x + \triangle x$ statt x, $q + \triangle q$ statt q, und $z + \triangle z$ statt z, und subtrahire alsdenn von dem also veränderten Werthe die Function. Man erhält also hiernach

$$\begin{aligned} y + \triangle y &= x + \triangle x + q + \triangle q + z + \triangle z \\ y &= x \quad + q \quad + z \text{ subtrahirt} \\ \triangle y &= \triangle x + \triangle q + \triangle z. \end{aligned}$$

Man sieht also hieraus, daß die Differenz einer solchen Function sehr leicht schon dadurch gefunden wird, daß man von jeder veränderlichen Größe die Differenz nimmt.

Wäre die gegebene Function ein Aggregat oder ein Unterschied von mehreren veränderlichen und beständigen Größen, wie z. B. $y = x - a + q + b + z$: so fallen in der Differenz die beständigen Größen a und b weg, weil eine beständige Größe keinen Zuwachs erhalten, d. h. keine Differenz haben kann. Man erhält also vom vorigen Beyspiele

$$\triangle y = \triangle x + \triangle q + \triangle z.$$

§. 4.

Ist die Function ein Produkt einer veränderlichen Größe in eine beständige, so findet man die Differenz derselben, wenn man die Differenz der veränderlichen Größe mit der beständigen multiplicirt. Es sey nämlich $y = ax$, so hat man $\triangle y = a \triangle x$; denn es ist $y + \triangle y = ax + a \triangle x$ und $\triangle y = a \triangle x$. Wäre hingegen die Function ein Produkt aus zwey veränderlichen Größen, z. B. $y = xz$: so findet man die Differenz also: Man setze $y + \triangle y$ statt y, $x + \triangle x$ statt x und

und $z + \Delta z$ statt z, und multiplicire alsdenn wie gewöhnlich. Von dieser also veränderten Function subtrahire man die gegebene. Man hat also

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (x + \Delta x)(z + \Delta z) \\ &= xz + x\Delta z + z\Delta x + \Delta x \Delta z \\ y &= xz \quad \text{subtrahirt} \\ \Delta y &= x\Delta z + z\Delta x + \Delta x \Delta z. \end{aligned}$$

§. 5.

Ist $y = \frac{x}{z}$, so läßt sich die Differenz dieser Function ebenfalls sehr leicht finden, wenn man $y + \Delta y$ statt y, $x + \Delta x$ statt x und $z + \Delta z$ statt z setzet, und alsdenn von der veränderten Function die gegebene subtrahiret. Man erhält also

$$y + \Delta y = \frac{x + \Delta x}{z + \Delta z}$$

$$y = \frac{x}{z} \quad \text{subtrahirt}$$

$$\Delta y = \frac{x + \Delta x}{z + \Delta z} - \frac{x}{z}.$$

Bringt man alles unter einerley Nenner, so bekommt man

$$\Delta y = \frac{xz + z\Delta x}{z^2 + z\Delta z} - \frac{xz + x\Delta z}{z^2 + z\Delta z}$$

$$= \frac{xz + z\Delta z - (xz + x\Delta z)}{z^2 + z\Delta z} = \frac{z\Delta x - x\Delta z}{z^2 + z\Delta z}$$

Wenn $y = \frac{a}{z}$ ist, so wird $y + \Delta y = \frac{a}{z + \Delta z}$

und

und $\Delta y = \frac{a}{z + \Delta z} - \frac{a}{z} = \frac{az - az - a\Delta z}{z^2 + z\Delta z}$
$= -\frac{a\Delta z}{z^2 + z\Delta z}$. Ist hingegen $y = \frac{x}{a}$, so wird $y + \Delta y = \frac{x + \Delta x}{a}$, und $\Delta y = \frac{x + \Delta x}{a} - \frac{x}{a}$
$= \frac{\Delta x}{a}$.

§. 6.

Wenn in der gegebenen Function die Theile derselben Potenzen der veränderlichen Größe mit ganzen Exponenten sind, d. h. wenn die Function rational ist: so hat man nur nöthig zu wissen, wie die Differenz einer jeden Potenz zu finden ist. Es sey also überhaupt $y = x^n$, wo n eine ganze Zahl bedeutet; nun setze man $y + \Delta y$ statt y und $x + \Delta x$ statt x, suche nach dem binomischen Lehrsatze die nte Potenz von $x + \Delta x$, und subtrahire hievon die Potenz x^n; hierdurch erhält man die Differenz der Potenz. Man hat nämlich

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x. + \frac{n.n-1}{1.2}.x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}\Delta x^3 + \text{u. f.}$$

$y = x^n$ subtrahirt.

$$\Delta x = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}\Delta x^3 + \text{u. f.}$$

Man sieht leicht, daß diese Reihe irgendwo einmal aufhören müsse, weil n eine ganze Zahl seyn soll.

Bey-

Beyspiele:

$\Delta . x^2 = 2x \quad \Delta x + \Delta x^2$

$\Delta . x^3 = 3x^2 \; \Delta x + 3x \; \Delta x^2 + \Delta x^3$

$\Delta . x^4 = 4x^3 \; \Delta x + 6x^2 \Delta x^2 + 4x \Delta x^3 + \Delta x^4$

$\Delta . x^5 = 5x^4 \; \Delta x + 10x^3 \Delta x^2 + 10x^2 \Delta x^3 + 5x \; \Delta x^4 + \Delta x^5$ u. s.

§. 7.

Da eine jede rationale ganze Function diese allgemeine Form hat $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 +$ u. s.: so findet man die Differenz derselben sehr leicht; sie ist nämlich:

$b \Delta x + 2cx \Delta x + c \Delta x^2 + 3dx^2 \Delta x + 3dx \Delta x^2 + d \Delta x^3 + 4ex^3 \Delta x + 6ex^2 \Delta x^2 + 4ex \Delta x^3 + e \Delta x^4 + 5fx^4 \Delta x + 10fx^3 \Delta x^2 + 10fx^2 \Delta x^3 + 5fx \Delta x^4 + f \Delta x^5$ u. s.

und wenn man die Glieder nach den Potenzen von Δx ordnet:

$(b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + 5fx^4) \Delta x + (c + 3dx + 6ex^2 + 10fx^3) \Delta x^2 + (d + 4ex + 10fx^2) \Delta x^3 + (e + 5fx) \Delta x^4 + (f + —) \Delta x^5 +$ u. s.,

und wenn man statt der Coefficienten von Δx, Δx^2, Δx^3, u. s. die Buchstaben A, B, C, D, E u. s. setzet.

$A \Delta x + B \Delta x^2 + C \Delta x^3 + \Delta x^4 + E \Delta x^5$ u. s.,

wo also A, B, C, D, E u. s. lauter Functionen von x sind.

§. 8.

Ueberhaupt läßt sich die Differenz einer jeden Function, von welcher Gestalt sie auch sey, unter diese allgemeine Form $A \Delta x + B \Delta x^2 + C \Delta x^3 + D x^4 + E \Delta x^5 +$ u. s. bringen, wo A, B, C, D, E u. s.

jeder

jederzeit Functionen von x sind. Dies kann man sehr leicht auf folgende Art zeigen. Wenn in der Potenz x^n der Exponent keine ganze positive, sondern eine negative ganze oder gebrochene, oder eine positive gebrochene Zahl ist: so wird die Potenz x^n entweder eine rationale gebrochene oder eine irrationale ganze oder gebrochene Function. Sucht man daher von diesen Functionen die Differenz, so läßt sich diese jederzeit mittelst der binomischen Formel in eine unendliche Reihe verwandeln, mithin auf jenen allgemeinen Ausdruck bringen. Folgende Beyspiele werden dies aufs deutlichste darstellen. Es sey $y = x^{-1}$, so hat man

$$y+\Delta y = (x+\Delta x)^{-1} = x^{-1} - x^{-2}\Delta x + x^{-3}\Delta x^2 - x^4\Delta x^3 + x^5\Delta x^4 - \text{u. f. } x^{-1} \text{ subtrahirt}$$

$$\Delta y = -x^{-2}\Delta x + x^{-3}\Delta x^2 - x^4\Delta x^3 + x^5\Delta z^4 -$$

$$= -\frac{\Delta x}{x^2} + \frac{\Delta x^2}{x^3} - \frac{\Delta x^3}{x^4} + \frac{\Delta x^4}{x^5} - \text{u. f.}$$

Eben so findet man

$$\Delta . x^{-2} = -\frac{2\Delta x}{x^3} + \frac{3\Delta x^2}{x^4} - \frac{4\Delta x^3}{x^5} + \frac{5\Delta x^4}{x^6} -$$

$$\Delta . \sqrt{x} = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} - \frac{\Delta x^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{\Delta x^3}{16x^2\sqrt{x}} - \frac{6\Delta x^4}{128x^3\sqrt{x}} + \text{f.}$$

$$\Delta . \sqrt[3]{x} = \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\Delta x^2}{9x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5\Delta x^3}{81x^2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{10\Delta x^4}{243x^3\sqrt[3]{x^2}}$$

$+$ u. f.

$$\Delta . x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\Delta x}{2x\sqrt{x}} + \frac{3\Delta x^2}{8x^2\sqrt{x}} - \frac{5\Delta x^3}{16x^3\sqrt{x}} + \frac{35\Delta x^4}{127x^4\sqrt{x}}$$

$-$ u. f.

$$\Delta . x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\Delta x}{3x\sqrt{x}} + \frac{2\Delta x^2}{3x^2\sqrt{x}} - \frac{14\Delta x^3}{81x^3\sqrt{x}} + \frac{35\Delta x^4}{243x^4\sqrt{x}}$$

$-$ u. f.

Auf

Auf dieselbe Art läßt sich überhaupt die Differenz einer jeden gebrochenen und irrationalen ganzen Function in eine unendliche Reihe verwandeln. In der rationalen gebrochenen Function nämlich setzt man $x + \Delta x$ statt x, und nimmt den so veränderten Werth der Function der Reihe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\Delta x + \mathfrak{C}\Delta x^2 + \mathfrak{D}\Delta x^3 + \mathfrak{E}\Delta x^4 +$ u. s. gleich. Hierauf multipliciret man auf beyden Seiten mit dem Nenner der veränderten Function, und vergleichet die beyderseitigen Coefficienten, wodurch sich die unbestimmten Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ u. s bestimmen lassen; endlich subtrahirt man auf beyden Seiten die gebrochene Function. Es sey z. B. die gebrochene Function $\frac{ax}{c + bx}$. Man setze also $\frac{a\,(x + \Delta x)}{c + b\,(x + \Delta x)}$

$= \frac{ax + a\Delta x}{c + bx + b\Delta x} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\Delta x + \mathfrak{C}\Delta x^2 + \mathfrak{D}\Delta x^3$
$+ \mathfrak{E}\Delta x^4 + \mathfrak{F}\Delta x^5 +$, und multiplicire auf beyden Seiten durch den Nenner $c + bx + b\Delta x$, so ergibt sich
$ax + a\Delta x = \mathfrak{A}\,(c + bx) + \mathfrak{A}\,b\Delta x + \mathfrak{B}\,b\Delta x^2 +$
$\mathfrak{B}\,(c + bx)\,\Delta x + \mathfrak{C}\,(c + bx)\,\Delta x^2 + \mathfrak{C}\,b\Delta x^3 +$
$\mathfrak{D}\,b\Delta x^4 + \mathfrak{E}\,b\Delta x^5 + \mathfrak{D}\,(c + bx)\,\Delta x^3 + \mathfrak{E}\,(c+bx)$
$\Delta x^4 + \mathfrak{F}\,(c + bx)\,\Delta x^5$ u. s., und man hat $ax =$
$\mathfrak{A}\,(c + bx)$, mithin $\mathfrak{A} = \frac{ax}{c + bx}$; $\frac{abx}{c + bx} + \mathfrak{B}$
$(c + bx) = a$, und $\mathfrak{B}\,(c + bx) = a - \frac{abx}{c + bx}$
oder $\mathfrak{B}\,(c + bx) = \frac{ac + abx - abx}{c + bx} = \frac{ac}{c + bx}$,
und $\mathfrak{B} = \frac{ac}{(c + bx)^2}$; ferner $\frac{acb}{(c + bx)^2} + \mathfrak{C}\,(c + bx)$

$\mathfrak{B}$ $=$

$= 0$, und $\mathfrak{C} = -\dfrac{acb}{(c+bx)^3}$; $-\dfrac{ab^2c}{(c+bx)^3} + \mathfrak{D}(c+bx) = 0$, und $\mathfrak{D} = \dfrac{ab^2c}{(c+bx)^4}$; $\dfrac{ab^3c}{(c+bx)^4} + \mathfrak{E}(c+bx) = 0$, und $\mathfrak{E} = -\dfrac{ab^3c}{(c+bx)^5}$; $-\dfrac{ab^4c}{(c+bx)^5} + \mathfrak{F}(c+bx) = 0$, und $\mathfrak{F} = \dfrac{ab^4c}{(c+bx)^6}$ u. s. Also wird

$$\frac{ax + a\Delta x}{c + bx\ a\Delta x} = \frac{ac}{c+bx} + \frac{ac\Delta x}{(c+bx)^2} - \frac{acb\Delta x^2}{(c+bx)^3} + \frac{ab^2c\Delta x^3}{(c+bx)^4} - \frac{ab^3c\Delta x^4}{(c+bx)^5} + \frac{ab^4c\Delta x^5}{(c+bx)^6} - \text{u. s.}$$

$\dfrac{ax}{c+bx}$ subtrahirt, gibt

$$\Delta\frac{ax}{c+bx} = \frac{ac\Delta x}{(c+bx)^2} - \frac{acb\Delta x^2}{(c+bx)^3} + \frac{acb^2\Delta x^3}{(c+bx)^4} - \frac{acb^3\Delta x^4}{(c+bx)^5}\ \text{u. s.}$$

Eben so lassen sich alle mögliche Differenzen von Functionen in unendliche Reihen verwandeln, deren Glieder die nach einander folgenden Potenzen von Δx enthalten, zu welchen die Coefficienten als lauter Functionen von x gehören. Daraus ist klar, daß die Differenz einer jeden Function sich auf die allgemeine Form bringen läßt:

$$\Delta y = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + D\Delta x^4 + E\Delta x^5 + \text{u. s.}$$

§. 9.

Wenn man die Differenz der Function gefunden hat, so kann man wiederum die Differenz von dieser gefundenen Differenz suchen. Wenn man nämlich annimmt, daß die veränderliche Größe in der gefundenen

Diffe-

Differenz sowohl um ein unbestimmtes Stück, als auch der erste Zuwachs derselben um einen zweyten zunimmt; so läßt sich alsdenn von der Veränderung die gefundene Differenz subtrahiren, und diese Differenz wird eben die **Differenz** von der gefundenen Differenz, oder die **zweyte Differenz** der Function genennt. Man bezeichnet diese durch $\Delta\Delta$ oder Δ^2. Ist z. B. $y = ax^2$, so hat man die erste Differenz $\Delta y = 2ax\Delta x + a\Delta x^2$; setzt man nun in dieser Differenz $\Delta y + \Delta^2 y$ statt Δy, $x + \Delta x$ statt x, $\Delta x + \Delta^2 x$ statt Δx, $\Delta x^2 + \Delta^2 x^2$ statt Δx^2: so hat man $\Delta y + \Delta^2 y = 2a(x + \Delta x)(\Delta x + \Delta^2 x) + a(\Delta x^2 + \Delta^2 x^2) = 2ax\Delta x + 3a\Delta x^2 + 2ax\Delta^2 x + 2a\Delta x\Delta^2 x + a\Delta^2 x^2$; $\Delta y = 2ax\Delta x + a\Delta x^2$ subtrah. $\Delta^2 y = 2a\Delta x^2 + 2ax\Delta^2 x + 2a\Delta x\Delta^2 x + a\Delta^2 x^2$. Auf dieselbe Art kann abermals in der zweyten Differenz sowohl die veränderliche Größe, als auch der erste und zweyte Zuwachs von neuem um ein unbestimmtes Stück wachsen, und der Unterschied dieser Veränderung und der zweyten Differenz heißt die **dritte Differenz** der Function, und wird durch $\Delta\Delta\Delta$ oder Δ^3 bezeichnet. Hieraus ist nun leicht zu erkennen, was unter der $n$ten Differenz einer Function zu verstehen sey.

§. 10.

Da bey Erfindung der zweyten, dritten u. s. Differenzen aller möglichen Functionen dasselbe Verfahren Statt findet, welches bey Erfindung der ersten Differenz vorgeschrieben ist: so kann es keine Schwierigkeit haben, alle diese Differenzen gehörig zu bestimmen. Folgende Paar Beyspiele werden es ganz deutlich darstellen:

Es sey $y = ax$, so hat man

$\Delta y = a\Delta x$; ferner:

$\Delta y + \Delta^2 y = a(\Delta x + \Delta^2 x) = a\Delta x + a\Delta^2 x$

$\Delta y \qquad\qquad = a\Delta x$ subtrahirt!

$\Delta^2 y = a\Delta^2 x$; noch weiter:

$\Delta^2 y + \Delta^3 y = a(\Delta^2 x + \Delta^3 x) = a\Delta^2 x + a\Delta^3 x$

$\Delta^2 y = \qquad\qquad a\Delta^2 x$ subtrahirt

$\Delta^3 y = a\Delta^3 x$, u. s.

Es sey $y = x^2$, so wird

$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$; ferner:

$\Delta y + \Delta^2 y = 2(x + \Delta x)(\Delta x + \Delta^2 x) + (\Delta x^2 + \Delta^2 x^2) = 2x\Delta x + 2\Delta x^2 + 2x\Delta^2 x + 2\Delta x\Delta^2 x + \Delta x^2 + \Delta^2 x^2$; $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$ subtrahirt

$\Delta^2 y = 2\Delta x^2 + 2x\Delta^2 x + 2\Delta x\Delta^2 x + \Delta^2 x^2$ u. s.

Auf dieselbe Art lassen sich die auf einander folgenden Differenzen aller möglichen Functionen finden.

§. 11.

Oefters geschieht es, daß der erste Zuwachs der veränderlichen Größe eine beständige Größe wird, mithin $\Delta^2 x = 0$; alsdenn gibt es Fälle, wo die gegebene Function gar keine zweyte Differenz haben kann, wie z. B. die Differenz eines jeden Gliedes in einer arithmetischen Progression; viele Fälle aber führen zuletzt auf beständige Größen. Z. E. $y = x^2$; also $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$, und

$\Delta y + \Delta^2 y = 2(x + \Delta x)\,\Delta x + \Delta x^2$

wenn Δx beständig ist

$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$ subtrahirt

$\Delta^2 y = 2\Delta x^2$; also eine beständige Größe.

Es sey ferner $y = x^3$, so hat man

$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$; ferner

Δy

$$\Delta y + \Delta^2 y = 3(x+\Delta x)^2 \Delta x + 3(x+\Delta x)\Delta x^2 + \Delta x^3$$
$$= 3x^2\Delta x + 9x\Delta x^2 + 7\Delta x^3$$
$$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 \text{ subtrahirt}$$
$$\Delta^2 y = 6x\Delta x^2 + 6\Delta x^3 \text{; weiter:}$$
$$\Delta^2 y + \Delta^3 y = 6(x+\Delta x)\ \Delta x^2 + 6\Delta x^3$$
$$= 6x\Delta x^2 + 12\Delta x^3$$
$$\Delta^2 y = 6x\Delta x^2 + 6\Delta x^3 \text{ subtrahirt}$$
$$\Delta^3 y = 6\Delta x^3 \text{; also eine beständige Größe u.s.}$$

Zweyter Abschnitt.

Von den Grenzen der Verhältnisse und von den Gründen der Differenzialrechnung.

---

§. 12.

Eine unendlich große Größe heißt diejenige, welche größer werden kann, als jede endliche Größe, die sich angeben läßt. Man stellt sich nämlich eine Grenze vor, welcher sich eine Größe durch beständige Vermehrung nähert, ob sie gleich die Grenze nie erreichen kann, und nimmt diese Grenze statt der Größe in einem Zustande, welchen man für ihren letzten ansieht. Eine unendlich kleine Größe hingegen heißt diejenige, welche kleiner ist, als eine jede endliche Größe, so klein sie auch seyn mag. Die Grenze, bis auf welche eine Größe abnehmen kann, ist o. Eine unendlich kleine Größe kann also dieser Grenze oder der o so nahe kommen, als man nur will, ob sie gleich dieselbe nie erreicht. Wenn z. B. eine gerade Linie halbiret und jede Hälfte von neuem

em

em halbiret werden soll, wo also die Halbirung eines jeden Theiles bis ins Unendliche geschehen kann: so muß die Hälfte des letzten Theiles kleiner werden, als jede endliche Größe, mithin unendlich klein. Wenn $y = \frac{1}{x}$, und x nimmt unendlich ab, oder wird unendlich klein: so wächst y unendlich, oder wird unendlich groß; wenn dagegen x unendlich wächst, oder unendlich groß wird: so nimmt y unendlich ab, oder wird unendlich klein. Eine endliche Größe muß also in Vergleichung mit einer unendlich großen Größe verschwinden, oder als o anzusehen seyn, und eine unendlich kleine Größe muß in Vergleichung mit einer endlichen ebenfalls verschwinden, mithin als o angesehen werden, ob sie gleich für sich betrachtet nie als o gelten kann, sondern jederzeit als eine Größe angesehen werden muß, ob sie gleich kleiner, als jede endliche Größe ist.

§. 13.

Wenn der Unterschied einer Größe von einem gewissen Werthe kleiner werden kann, als eine noch so kleine gegebene Größe: so sagt man, jene Größe nähere sich diesem Werthe unendlich, da alsdenn dieser Werth die Grenze der Größe genennt wird. Wenn z. B. jemand die Länge eines Weges so zurücklegen soll, daß er zuerst die Hälfte des Weges, und von jeder folgenden Hälfte wiederum die Hälfte zurücklege: so wird zwar jederzeit ein Theil des Weges übrig bleiben, aber dieser Ueberrest kann kleiner, als eine noch so kleine Größe werden; mithin ist die Länge des Weges, welchem sich der zurückzulegende unendlich nähert, die Grenze. Auch

heißt

heißt ein Verhältniß, welchem sich ein anderes unendlich nähert, die Grenze dieses andern Verhältnisses. Verhielten sich z. B. in zwey ähnlichen Dreyecken zwey gleichnamige Seitenlinien wie $\sqrt{12} : \sqrt{5}$, so wäre das Verhältniß $\sqrt{12} : \sqrt{5}$ die Grenze, welchem sich die Werthe 3,4 : 2,2 oder 3,46 : 2,23 oder 3.464 : 2,236 oder 3,4641 : 2,2360 u. s. f. unendlich nähern, ob sie gleich jenes Verhältniß nie erreichen können; es kann aber der Unterschied zwischen beyden Verhältnissen kleiner, als eine jede noch so kleine Größe werden.

§. 14.

Es sey $y = a + x$, und y nähere sich dem Werthe a unendlich: so kann man natürlich für y einen jeden Werth setzen, welcher zwischen a und $a + x$ fällt. Läßt man aber x unendlich abnehmen, oder unendlich klein werden: so ist x in Vergleichung mit der endlichen Größe a als o zu betrachten, und es muß alsdenn die Grenze, welche man für y gebrauchen kann, $= a$ seyn. Es bedeute nämlich (Fig. 1.) die gerade Linie $AC = y$, $AB = a$, und $BC = x$, mithin $AC = AB + BC$ oder $y = a + x$. Nun kann C dem Punkte B immer näher und näher rücken, mithin y alle mögliche Werthe zwischen a und $a + x$ erhalten. Rückt endlich C dem Punkte B unendlich nahe, oder wird $BC = x$ unendlich klein: so verschwindet BC in Vergleichung mit AB, und es wird alsdenn $y = AB = a$.

§. 15.

Es sey $y = a + bx$, und x eine veränderliche Größe, welche unendlich wächst, man soll die Grenze finden, welcher sich y unendlich nähert.

Auflösung.

Man dividire $a + bx$ durch bx, so hat man $\frac{a + bx}{bx} = \frac{a}{bx} + 1$. Wächst nun die veränderliche Größe x unendlich, so nimmt der Bruch $\frac{a}{bx}$ unendlich ab, und es nähert sich folglich $\frac{a}{bx} + 1$ dem Werthe 1 unendlich. Es ist aber auch $\frac{a + bx}{bx} = \frac{y}{bx}$. Wenn daher x unendlich wächst, so muß sich auch $\frac{y}{bx}$ dem Werthe 1 unendlich nähern, und da $\frac{y}{bx}$ nicht anders $= 1$ werden kann, als wenn $y = bx$ ist: so folgt, daß y sich dem Werthe bx unendlich nähert.

Wollte man behaupten, daß bx jederzeit von 1 um einen gewissen Unterschied $= \delta$, der sich angeben ließe, verschieden wäre, so daß bx nie kleiner als $1 + \delta$ werden könnte: so folgte, daß auch $\frac{a}{bx} + 1$ nie kleiner als $1 + \delta$, d. h. $\frac{a}{bx}$ nie kleiner als δ werden könnte. Allein dies ist der Voraussetzung zuwider; denn hiernach soll die veränderliche Größe x unendlich wachsen, mithin $\frac{a}{bx}$ unendlich abnehmen, d. h. $\frac{a}{bx}$ muß eine Größe seyn, welche kleiner werden kann, als eine jede Größe, die sich ange-

ben

ben läßt. In dem Zustande des Wachsthums von x, welchen man als den letzten ansieht, würde also $y = b . \infty$ seyn, d. h., wenn x unendlich groß wird: so werden alle beständige Größen, welche x nicht als einen Factor enthalten, in Vergleichung mit demjenigen Theile, welchen x als Factor besitzet, verschwinden.

§. 16.

Es sey y eine Function von x, und es werde $y + \Delta y$, wenn $x + \Delta x$ in der Function gesetzt wird. Wenn alsdenn in der veränderten Function Δx als unendlich klein angenommen wird, so nennt man die Grenze, welcher sich das Verhältniß $\Delta y : \Delta x$ unendlich nähert, das Verhältniß der Differenziale von y und x: so wie die unendlich kleinen Δy und Δx die Differenziale von y und x. Die Differenz Δy kann unendlich abnehmen, wenn Δx unendlich abnimmt, so daß sie sich selbst für die unendliche Abnahme des Δx nicht bestimmen läßt. Wenn aber ihr Verhältniß $\Delta y : \Delta x$ bey einer unendlichen Abnahme von Δx noch endlich bleibt, so läßt sich dieses noch angeben. Es sey (Fig. 2.) A der Anfangspunkt der Abscissen, $AB = x$ eine Abscisse, und $BD = y$ die dazu gehörige Ordinate für die krumme Linie ADF. Wenn nun die Abscisse AB um das unbestimmte Stück $BC = DE = \Delta x$ zunimmt, so nimmt alsdenn $BD = EC$ um das unbestimmte Stück $EF = \Delta y$ zu. Demnach ist das Verhältniß $\Delta y : \Delta x = FE : ED$, oder weil $ED = CB$, $\Delta y : \Delta x = FE : BC$. Nun kann man sich vorstellen, daß die Applikate FC der Applikate DB ohne Ende näher komme, da alsdenn das Verhältniß $FE : BC$ sich dem Verhältnisse der Differen-

ferenzialien der Applikate und der Abscisse ohne Ende nähert. Setzt man also, KI : ID sey das Verhältniß, welchem sich das Verhältniß FE : ED unendlich nähert, oder wenn man KI und ID unendlich klein annimmt: so sind dies die Differenzialien der Applikate und Abscisse.

Wäre ADF eine Parabel, der Anfangspunkt der Abscissen der Scheitelpunkt A, also die Abscisse AB = x, die dazu gehörige Applikate BD = y, und der Parameter = p: so hat man $y^2 = px$. Wenn nun x um das unbestimmte Stück BC = Δx, mithin y um das unbestimmte Stück EF = Δy zunimmt: so verwandelt sich die Gleichung in $(y + \Delta y)^2 = p(x + \Delta x)$, oder in $y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 = px + p\Delta x$. Wenn die Applikate BD = y unverändert bleibt, BC = Δx aber beständig abnimmt: so nimmt auch EF = Δy beständig ab, und die Gleichung

$$y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 = px + p\Delta x$$
$$y^2 = px \text{ subtrahirt, gibt}$$
$$2y\Delta y + \Delta y^2 = p\Delta x, \text{ und}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p}{2y + \Delta y} \text{ oder}$$
$$\Delta y : \Delta x = p : 2y + \Delta y.$$

Je mehr nun Δy abnimmt, desto mehr nähert sich $2y + \Delta y$ dem Werthe $2y$. Kann man also FC so nahe, als man will, an DB rücken lassen: so kommt das Verhältniß $\Delta y : \Delta x$ dem Verhältnisse $p : 2y$ so nahe, als man will; also ist $p : 2y$ das Verhältniß der Differenzialien Δy und Δx.

Anmerk. Obgleich Δy in Vergleichung mit $2y$ verschwindet, mithin als wirkliche o zu betrachten ist: so darf man doch nicht annehmen, daß es für sich = o, mithin auch

auch $\Delta x = 0$ wäre. Das Verhältniß $\Delta y : \Delta x$ ist bloß ein veränderliches Verhältniß, welches beständig abnehmen muß, so lange Δy, mithin auch Δx abnimmt. Sobald Δy in Vergleichung mit $2y$ verschwindet, so so hat das Verhältniß $\Delta y : \Delta x$ die Grenze $p : 2y$ erreicht, und kann nun nicht weiter abnehmen. Wäre hingegen y, mithin auch x wirklich $= 0$, so muß offenbar $\Delta y^2 = p\Delta x$ seyn, Δx mag einen Werth haben, welchen man will, und man hat $\Delta y : \Delta x = p : \Delta y$. Hier werden nicht Aenderungen Δy und Δx der beyden Linien y und x mit einander verglichen, sondern die entstehende Applicate Δy mit der entstehenden Abscisse Δx. Wenn also in diesem Falle Δy, mithin auch Δx als unendlich klein angenommen würde: so müßte Δy in Vergleichung mit p verschwinden, mithin auch das Verhältniß $\Delta y : \Delta x$, d. h. das Verhältniß $\Delta y : \Delta x$ ließe sich nun gar nicht mehr bestimmen. Bey dieser Rechnung wird daher allemal vorausgesetzt, daß die veränderliche Größe x einen gewissen bestimmten Werth hat, Δx anfänglich endlich ist, und endlich kleiner werden kann, als jede Größe, die sich angeben läßt. Die Differenziale der veränderlichen Größen pflegt man durch den Buchstaben d auszudrucken. So schreibt man dy, dx statt der bisherigen Δy und Δx, wo d nicht einen Factor bedeutet, sondern mit der veränderlichen Größe zusammen ein einziges Zeichen ausmacht, so daß dy, dx etwas unendlich Kleines darstellet.

§. 17.

Es sey $a^{n-1}y = x^n$, man sucht das Verhältniß der Differenzialien dy und dx. Man setze $y + \Delta y$ statt y,

y, und $x + \Delta x$ statt x: so verwandelt sich jene Gleichung in diese:

$$a^{n-1}(y + \Delta y) = (x + \Delta x)^n, \text{ oder in } a^{n-1}y$$

$$+ a^{n-1}\Delta y = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2}\Delta x^2 +$$

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3}\Delta x^3 + \text{u. f.}$$

$a^{n-1}y = x^n$ subtrahirt.

$$a^{n-1}\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2}\Delta x^2 +$$

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3}\Delta x^3 + \text{u. f.}$$

$\Delta x = \Delta x$ dividirt

$$\frac{a^{n-1}\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2}\Delta x +$$

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3}\Delta x^2 + \text{u. f.}$$

Wenn nun x einen gewissen endlichen Werth behält, so kann doch Δx bis ins Unendliche abnehmen; in diesem letzten Fälle müssen aber alle Glieder, welche Δx enthalten in Vergleichung mit dem endlichen nx^{n-1} verschwinden, und es ist folglich das Verhältniß der Differenzialien $dy : dx = nx^{n-1} : a^{n-1}$. Ist $a = 1$, so hat man

$$dy : dx = nx^{n-1} : 1, \text{ mithin}$$

$$dy = nx^{n-1}dx.$$

Es wird also auch hier vorausgesetzt, daß x einen gewissen bestimmten endlichen Werth erhalte, Δx aber bis ins Unendliche abnehmen kann. Wäre $x = 0$, so wäre offenbar $\Delta y = \Delta x^n$, es möchte Δx einen Werth haben, welchen man wollte.

Es sey z. B. $ay = x^2$, oder das Quadrat x^2, dessen Seitenlinie eine veränderliche Größe ist, sey beständig so groß, als ein Rechteck, dessen Grundlinie die beständige Größe a, und die Höhe die veränderliche Größe y ist. Wenn sich nun x in $x + \Delta x$ und y in $y + \Delta y$ ändert, so verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$a(y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2,$$
$$ay = x^2 \text{ subtrahirt;}$$
$$a\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2, \text{ und}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x + \Delta x^2}{a}, \text{ also}$$
$$\Delta y : \Delta x = 2x + \Delta x : a.$$

Wenn nun x einen gewissen bestimmten endlichen Werth hat, so kann man Δx immer so klein annehmen, als man will, und in diesem Falle kommt das Verhältniß dem Verhältnisse $2x : a$ so nahe, als man will, mithin ist das Verhältniß der Differenzialien $dy : dx = 2x : a$.

Wäre hingegen $x = 0$, mithin auch $y = 0$: so verwandelte sich die Gleichung $a\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$ in diese $a\Delta y = \Delta x^2$, und man hätte daher $\Delta y : \Delta x = \Delta x : a$. Wenn nämlich ein Quadrat entstehen soll, wo vorher keines gewesen ist, so sind die nach einander folgenden Seitenlinien nicht x und $x + \Delta x$, sondern o und $o + \Delta x$, und die hiezu gehörigen Höhen o und $o + \Delta y$ des Rechteckes. Hier werden also offenbar nicht Aenderungen Δy und Δx der beyden Linien y und x mit einander verglichen, sondern die entstehende Höhe Δy mit der entstehenden Seite Δx. Wenn auch hier Δx unendlich klein angenommen wird, so muß die Größe des Verhältnisses $\Delta y : \Delta x$ kleiner werden, als

jede

jede Größe, die sich angeben läßt, also auch das Quadrat Δx^2 kleiner, als jedes Quadrat, das sich angeben läßt.

§. 18.

Wenn y eine Function von x ist, so heißt das Verhältniß der Differenziale $dy : dx$ finden, y differenziiren. Es beschäftiget sich also die Differenzialrechnung mit denjenigen Regeln, nach welchen das Differenzialverhältniß einer jeden Function auf dem kürzesten Wege zu finden sey.

Anmerk. Bey der Differenzialrechnung wird allemal vorausgesetzet, daß die Größen x und y einen gewissen Werth erhalten, Δy und Δx aber bis ins Unendliche abnehmen, d. h. kleiner werden, als jede endliche Größe. Man muß daher jederzeit annehmen, daß eine unendlich kleine Größe in Vergleichung mit einer endlichen verschwinden muß, ob sie gleich für sich betrachtet nie $= 0$ gelten kann. Man darf ja nicht glauben, daß dies widersprechend wäre. Die gemeine Rechenkunst gibt hievon schon auffallende Beyspiele. So kann man die Quadratwurzel von $\sqrt{6}$ so genau finden, daß der begangene Fehler kleiner werden kann, als jede noch so kleine gegebene Zahl. Dieser Fehler, eben weil er kleiner, als jede endliche Zahl werden kann, muß in Vergleichung mit der gefundenen endlichen Wurzel verschwinden, und doch ist er für sich betrachtet nie $= 0$. Wäre $\sqrt{6} = x + \Delta x$, und $\sqrt{8} = y + \Delta y$, so werden zwar Δx und Δy in Vergleichung mit x und y verschwinden, wenn Δx und Δy ohne Ende abnehmen; allein für sich kann weder Δx noch Δy als wirklich 0 angenommen werden, und es läßt sich daher das Verhältniß $dy : dx = \sqrt{8} - y : \sqrt{6} - x$

— x keinesweges $= 0 : 0$ setzen. Das Verhältniß $dy : dx$ kann hier nur dem Verhältnisse $0 : 0$ so nahe kommen, als man will, weil mit der Abnahme von Δy und Δx die Werthe y und x zunehmen, aber nie so groß werden, daß $\sqrt{8} - y$ und $\sqrt{6} - x$ wirkliche Nullen wären. Man sieht also wohl, daß die Gründe der Differenzialrechnung auf keiner künstlichen Nullenrechnung beruhen, wie sehr viele Mathematiker angenommen haben. Die Schwierigkeit in der Festsetzung derselben liegt in der Theilung der Größen bis ins Unendliche, welche nicht gegeben werden kann, sondern nur in unserer Vorstellung wirklich ist. Herr Langsdorf war mit den bisherigen Gründen der Differenzialrechnung nicht zufrieden, und nahm, zur bessern Begründung derselben, an, daß die Theilung der Größen nicht unendlich sey. (Abhandlung über die Unstatthaftigkeit des Princips der unendlichen Theilbarkeit. Erlangen 1804. 8.). Allein, seine Sätze können dem Mathematiker eben so wenig Genüge leisten, als wenn man die Differenziale als wirkliche Nullen ansehen wollte. Seine Elemente oder Raumpunkte (ein Ausdruck, der mir nicht gefällt) müßten das letzte seyn, auf welches man bey der Theilung der Größen kommt. Hiernach würden aber viele arithmetische und geometrische Wahrheiten schwankend. So würde man z. B. die Quadratwurzel von 3 nur bis auf eine gewisse Grenze ausziehen können, und der Pythagorische Lehrsatz würde nur beynahe wahr seyn. Man bezeichne nämlich die beyden Catheten mit a und b, und die Hypothenuse mit h: so ist $h^2 = a^2 + b^2$, und folglich $h = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Wäre nun h wirklich irrational, so müßte man beym Ausziehen der Wurzel, d. i.,

wirkli-

wirklicher Theilung, auf eine Grenze kommen, über welche man nie schreiten könnte; es würde also ein Fehler unvermeidlich, mithin der Lehrsatz nicht in aller Strenge wahr seyn.

§. 19.

Weil die Differenz einer jeden Function sich auf die allgemeine Form $\Delta y = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + D\Delta x^4 +$ u. s. bringen läßt, wo A, B, C, D u. s. lauter Functionen von x sind: so kann man jedesmal bestimmen, wie groß die Differenz der Function sey, sobald man im Stande ist, die Functionen A, B, C, D u. s. für jeden Werth von y zu bestimmen. Dividirt man nun diese allgemeine Form auf beyden Seiten durch Δx, so erhält man

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + B\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^3$ u. s.; folglich ist die Gränze des Verhältnisses oder das Differenzial

$\frac{dy}{dx} = A$, und $dy = Adx$, was auch A für eine Function von x seyn mag. Es ist daher die Differenzialrechnung bloß ein besonderer Fall von der Differenzenrechnung, wo die Zuwachse von y und x oder Δy und Δx als unendlich klein angenommen werden.

Da die zweyte Differenz einer Function aus der ersten, die dritte aus der zweyten, die vierte aus der dritten u. s. Differenz gefunden: so läßt sich eben so aus dem ersten Differenziale das zweyte, aus dem zweyten das dritte, aus dem dritten das vierte u. s. Differenzial finden.

Drit-

Dritter Abschnitt.

Von der Differenziation der algebraischen Functionen.

§. 20.

Unter andern Eintheilungen der Functionen ist besondes die Eintheilung der Functionen in algebraische und transcendente bey der Differenzialrechnung merkwürdig. Diese Eintheilung hängt bloß von der Verbindung der veränderlichen Größen mit den beständigen ab; durch die Verbindung der Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Erhebung der Potenzen und Ausziehung der Wurzeln entstehen jederzeit algebraische Functionen. Eine algebraische Function kann eine Function von einer einzigen oder von mehreren veränderlichen Größen seyn. Was die Differenziation der algebraischen Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe betrifft, so soll diese zuerst gelehret werden. Von der Differenziation der transcendenten Functionen in der Folge. Wen $y = x^n$ ist, und man setzt $y + dy$ statt y, und $x + dx$ statt x: so erhält man das Differenzial $dy = (x + dx)^n - x^n$ gerade so, wie die Differenz einer Function gefunden wird. Man hat also

$$(x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}dx^2$$

$+$ u. f., und daher $dy = nx^{n-1}dx$ (§. 17.).

Man findet daher das Differenzial der Potenz einer einzigen veränderlichen Größe, wenn man von dem Exponenten 1 subtrahirt, die daher entstandene Potenz mit dem Exponenten und mit dem Differenzial der Wurzel

multiplicirt. Diese Regel findet Statt, der Exponent n mag entweder eine ganz positive oder negative, oder eine gebrochene positive oder negative Zahl seyn.

§. 21.

Wenn der Exponent eine ganze Zahl ist, so findet man nach der Regel die Differenziale aller Potenzen von x auf folgende Art:

$$d \,.\, x^2 = 2x dx$$
$$d \,.\, x^3 = 3x^2 dx$$
$$d \,.\, x^4 = 4x^3 dx$$
$$d \,.\, x^5 = 5x^4 dx$$
$$d \,.\, x^6 = 6x^5 dx \text{ u. f.}$$

Wäre die Potenz noch mit einer beständigen Größe multiplicirt, so muß auch das Differenzial der Potenz mit der beständigen Größe multiplicirt werden. So ist

also $d \,.\, ax^3 = 3ax^2 dx$
$$d \,.\, bx^5 = 5bx^4 dx$$
$$d \,.\, cx^6 = 6cx^5 dx \text{ u. s. f.}$$

Eben so findet man

$d \,.\, 2x^3 = 6x^2 dx$; $d \,.\, \frac{2}{3}x^5 = \frac{10}{3}x^4 dx$
$d \,.\, -5x^2 = -10x dx$; $d \,.\, -\frac{2}{3}x^3 = -2x^2 dx$
u. s. f.

Wenn der Exponent n der Potenz x^n eine negative ganze Zahl ist, so findet man nach derselben Regel ihr Differenzial. So ist

$$d \,.\, x^{-1} = d \,.\, \frac{1}{x} = -x^{-2}dx = -\frac{dx}{x^2}$$

$$d \,.\, x^{-2} = d \,.\, \frac{1}{x^2} = -2x^{-3}dx = -\frac{2dx}{x^3}$$

d.

$$d \,.\, x^{-3} = d \,.\, \frac{1}{x^3} = -3x^{-4}dx = -\frac{3dx}{x^4}$$

$$d \,.\, x^{-n} = d \,.\, \frac{1}{x^n} = -nx^{-n-1}dx = -\frac{ndx}{x^{n+1}} \text{ f.}$$

§. 22.

Auch alsdann wird das Differenzial der Potenz x^n nach der nämlichen Regel gefunden, wenn der Exponent n eine positive oder negative gebrochene Zahl ist. Man hat also

$$d \,.\, x^{\frac{1}{2}} = d\sqrt{x} = \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}dx = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$d \,.\, x^{\frac{1}{3}} = d\sqrt[3]{x} = \tfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}dx = \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$d \,.\, x^{\frac{1}{4}} = d\sqrt[4]{x} = \tfrac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}dx = \tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}dx = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$$d.x^{\frac{1}{n}} = d\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-1}{n}}dx = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}dx = \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}}dx$$

$$d \,.\, x^{\frac{2}{3}} = d\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}dx = \tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{2dx}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$d \,.\, x^{\frac{3}{4}} = d\sqrt[4]{x^3} = \tfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}dx = \tfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{3dx}{4\sqrt[4]{x}}$$

$$d \,.\, x^{\frac{n}{m}} = d\sqrt[m]{x^n} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}dx = \frac{n}{m}x^{\frac{n-1}{m}}dx = \frac{ndx}{m}\sqrt[m]{x^{n-1}}$$

$$d.x^{-\frac{1}{2}} = d.\frac{1}{\sqrt{x}} = -\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}dx = -\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}dx = -\frac{dx}{2x\sqrt{x}}$$

d.

$$d.x^{-\frac{1}{3}} = d.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\tfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}dx = -\tfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}dx = -\frac{dx}{3x\sqrt[3]{x}}$$

$$d.x^{-\frac{1}{n}} = d.\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = -\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}-1}dx = -\frac{1}{n}x^{-\frac{1-n}{n}}dx = -\frac{dx}{nx\sqrt[n]{x}}$$

$$d.x^{-\frac{2}{3}} = d.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = -\tfrac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}dx = -\tfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx = -\frac{2dx}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$d.x^{-\frac{5}{4}} = d.\frac{1}{x\sqrt[4]{x}} = -\tfrac{5}{4}x^{-\frac{5}{4}-1}dx = -\tfrac{5}{4}x^{-\frac{9}{4}}dx = \frac{-5dx}{4x^2\sqrt[4]{x}}$$

$$d.x^{-\frac{n}{m}} = d.\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} = -\frac{n}{m}x^{-\frac{n}{m}-1}dx = -\frac{n}{m}x^{\frac{-n-m}{m}}dx = \frac{-ndx}{mx\sqrt[m]{x^n}}$$

Sollten die bisherigen Potenzen noch mit einer beständigen Größe multiplicirt seyn, so muß das Differenzial dieser Potenz mit der beständigen Größe multiplicirt werden. Z. B.

d.

$$d \,.\, \tfrac{3}{4}x^{\frac{2}{3}} = \tfrac{2}{3} \,.\, \tfrac{3}{4}x^{\frac{2}{3}-1}dx = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}}$$

$$d \,.\, -\tfrac{1}{3}x^{-\frac{3}{4}} = \tfrac{1}{3} \,.\, \tfrac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}-1}dx = \tfrac{1}{4}x^{-\frac{7}{4}}dx = \frac{dx}{4x\sqrt[4]{x^3}}$$

$$d \,.\, ax^{\frac{n}{m}} = d \,.\, a\sqrt[m]{x^n} = \frac{an}{m}x^{\frac{n}{m}-1}dx = \frac{an}{m}x^{\frac{n-m}{m}}dx = \frac{andx}{mx}\sqrt[m]{x^n}$$

§. 23.

Aus den bisherigen Beyspielen, welche die Differenziale der algebraischen Functionen einer einzigen veränderlichen Größe angeben, wird es gar keine Schwierigkeit haben, die Differenziale aller ganzen rationalen Functionen von x zu finden; denn es sind die Glieder solcher Functionen lauter Potenzen von x, welche nach der im §. 20. angegebenen Regel differenziiret werden. Es sey nämlich die rationale Function von x

$$q + r + s + t \text{ u. f.},$$

und man setze $x + dx$ statt x: so verwandelt sich diese Function in diese:

$$q + dq + r + dr + s + ds + t + dt;$$

mithin ist ihr Differenzial

$$dq + dr + ds + dt + \text{u. f.}$$

Kann man also von jedem Theile q, r, s, t u. f. das Differenzial bestimmen, so ist ihr Aggregat das Differenzial der Function. Würden in der Function einige Theile beständige Größen seyn, so müßten diese, weil ihr Differenzial $= 0$ ist, ganz wegfallen. Folgende Beyspiele werden dies auf eine genugthuende Art erläutern:

d

$$d(a + x) = dx;\ d(a - bx) = - bdx$$
$$d(ax + x^2) = adx + 2xdx$$
$$d(a + 3x^2 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{4}{5}x^5) = 6xdx + 2x^2dx - 4x^4dx$$
$$d(ax^n - bx^m + cx^r) = nax^{n-1}dx - mbx^{m-1}dx$$
$$+ rcx^{r-1}dx$$

Sollten auch die Exponenten der Potenzen von x negative ganze oder positive oder negative gebrochene Zahlen seyn, so wird man auf dieselbe Art aus der allgemeinen Regel das Differenzial der Function sehr leicht finden können, wie folgende Beyspiele zeigen.

$$d(x^{-2} + \tfrac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) = d.\left(\frac{1}{x^2} + \tfrac{3}{4}\sqrt{x} - \tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right)$$
$$= - 2x^{-3}dx + \tfrac{3}{8}x^{-\frac{1}{2}}dx - x^{\frac{1}{2}}dx = - \frac{2dx}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3dx}{8\sqrt{x}}$$
$$- dx\sqrt{x}$$
$$d(a + 2x^{-\frac{5}{2}} - 3x^{-2} + \tfrac{5}{4}x^{\frac{5}{3}}) = d(a + \frac{2}{x^2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$$
$$+ \tfrac{5}{4}x\sqrt[3]{x^2}) = - 5x^{-\frac{7}{2}}dx + 6x^{-3}dx + \tfrac{4}{3}x^{\frac{2}{3}}dx =$$
$$- \frac{5dx}{x^3\sqrt{x}} + \frac{6dx}{x^3} + \frac{4dx}{x^3}.\sqrt[3]{x^2}.$$

§. 24.

Es gibt noch eine Menge Functionen, deren Theile Potenzen einer zusammengesetzten Größe sind, und welche sich aus der nämlichen allgemeinen Regel differenziiren lassen, wenn man nur das Differenzial der zusammengesetzten Wurzel finden kann. Diese allgemeine Regel bleibt immer diese; man multiplicire die Potenz der zusammengesetzten Größe mit dem Exponenten, subtrahire

hire von dem Exponenten 1, und multiplicire, was heraus kommt, mit dem Differenzial der zusammengesetzten Wurzel. Folgende Beyspiele werden dies sehr deutlich zeigen.

$d(a+x)^2 = 2(a+x)\,d(a+x) = 2(a+x)dx$, weil $d(a+x) = dx$ ist.

$d(a-x)^3 = 3(a-x)^2\,d(a-x) = -3(a-x)^2 dx$

$d(a-x^2)^4 = 4(a+x^2)^3\,d(a+x^2) = 4(a+x^2)^3\,2xdx = 8xdx(a+x^2)^3$, weil $d(a+x^2) = 2xdx$ ist.

$d(3x+4x^2)^3 = 3(3x+4x^2)^2\,d(3x+4x^2) = 3(3x+4z^2)^2\,(3dx+8xdx)$, weil $d(3x+4x^2) = 3dx+8xdx$ ist.

$d(a-x+x^n)^m = m(a-x+x^n)^{m-1}\,d(a-x+x^n) = m(a-x+x^n)^{m-1}(-dx+nx^{n-1}dx)$, weil $d(a-x+x^n) = -dx+nx^{n-1}dx$ ist.

$$d.\frac{a}{(bx+cx^2)^3} = d\,.\,a\,.\,(bx+cx^2)^{-3} = -3a(bx+cx^2)^{-3}\,.\,d(bx+cx^2) = -3a(bx+cx^2)^{-5}(bdx+2cxdx) = \frac{-3a(bdx+2cxdx)}{(bx+cx^2)^3}.$$

$$d\sqrt{(x+ax^2+\sqrt[3]{bx})} = d(x+ax^2+b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(x+ax^2+\sqrt[3]{bx})^{-\frac{1}{2}}\,d(x+ax^2+b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}) = \tfrac{1}{2}(x+ax^2+\sqrt[3]{bx})^{-\frac{1}{2}}(dx+2axdx+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{b}\,.\,x^{-\frac{2}{3}}dx)$$

$$= \left(dx+2axdx+\frac{dx\sqrt[3]{b}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\tfrac{1}{2}(x+ax^2+\sqrt[3]{bx})^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{dx}{2\sqrt{(x+ax^2+\sqrt[3]{bx})}} + \frac{axdx}{\sqrt{(x+ax^2+\sqrt[3]{bx})}} +$$

$$+ \frac{dx\sqrt[3]{b}}{6\sqrt[3]{x^2}\sqrt{(x + ax^2 + \sqrt[3]{bx})}}.$$

§. 25.

Ist die Function, deren Differenzial gesuchet werden soll, ein Produkt aus zwey Factoren von x, wie z. B. $y = p \cdot q$, wo p und q Functionen von x sind: so läßt sich das Differenzial auf folgende Art finden. Es sey nämlich

$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$
$(p - q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$, mithin
$(p + q)^2 - (p - q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 - p^2 + 2pq - q^2 = 4pq = 4y$, weil $y = pq$ ist. Nun sey

$$p + q = u, \text{ also } dp + dq = du;$$
$$(p + q)^2 = u^2, \text{ und } d(p + q)^2 = 2udu,$$

und wenn man statt u und du die gleichen Werthe setzt, $d(p + q)^2 = 2udu = 2(p + q)(dp + dq) = 2pdp + 2pdq + 2qdq + 2qdp$; ferner sey $p - q = v$, also $dp - dq = dv$, $(p - q)^2 = v^2$ und $d(p - q)^2 = 2vdv = 2(p - q)(dp - dq) = 2pdp - 2pdq - 2qdp + 2qdq$; mithin wird $4dy = d(p + q)^2 - d(p - q)^2 = 2pdp + 2pdq + 2qdp + 2qdq - 2pdp + 2pdq + 2qdp - 2qdq$ oder $4dy = 4pdq + 4qdp$, und

$$dy = pdq + qdq.$$

Man findet also das Differenzial des Produkts pq, wenn man einen jeden Factor mit dem Differenziale des andern Factors multiplicirt, und diese Produkte zusammen addiret. Hieraus läßt sich nun auch die Regel, nach welcher das Differenzial eines Produkts aus drey oder

mehr

mehreren Factoren gefunden wird, herleiten. Man muß nämlich das Differenzial eines jeden Factors mit den übrigen Factoren multipliciren, und die daher entstandenen Produkte zusammen addiren. Folgende Beyspiele werden diese Regel erläutern:

$d(a+x)(b+x) = (a+x)dx + (b+x)dx = adx + xdx + bdx + xdx = adx + 2xdx + bdx.$

Dasselbe Differenzial würde man finden, wenn man vor der Differenziation die beyden Factoren in einander multiplicirte. Man findet nämlich

$(a+x)(b+x) = ab + ax + bx + x^2$, und das Differenzial $= adx + bdx + 2xdx$ wie vorhin.

$d(ax+x^2)(x+x^3) = (ax+x^2)(dx+3x^2dx) + (x+x^3)(adx+2xdx) = axdx + 3ax^3dx + x^2dx + 3x^4dx + axdx + 2x^2dx + ax^3dx + ax^4dx = 2axdx + 4ax^3dx + 3x^2dx + 5x^4dx.$

$$d.\frac{1}{x}\sqrt{(ax+bx^2)} = d.x^{-1}(ax+bx^2)^{\frac{1}{2}} = x^{-1}d(ax+bx^2)^{\frac{1}{2}} + (ax+bx^2)^{\frac{1}{2}}\,d.x^{-1} = \tfrac{1}{2}x^{-1}(ax+bx^2)^{-\frac{1}{2}}(adx+2bxdx) + x^{-2}dx\sqrt{(ax+bx^2)}$$

$$= \frac{adx+2bxdx}{2x\sqrt{(ax+bx^2)}} + \frac{dx\sqrt{(ax+bx^2)}}{x^2},$$ und wenn man alles unter einerley Nenner bringt, $=$

$$\frac{axdx+2bx^2dx+2axdx+2bx^2dx}{2x^2\sqrt{(ax+bx^2)}} = \frac{3axdx+4bx^2dx}{2x^2\sqrt{(ax+bx^2)}}$$

$$d.\frac{ax+bx^2}{\sqrt{(x+\sqrt{(a^2+x^2)})}} = (ax+bx^2)(x+\sqrt[3]{(a^2+x^2)})^{-\frac{1}{2}} = (ax+bx^2)\,d.(x+\sqrt[3]{(a^2+x^2)})^{-\frac{1}{2}} + (x+\sqrt[3]{(a^2+x^2)})^{-\frac{1}{2}}d(ax+bx^2) = -\tfrac{1}{2}(ax+bx^2)$$

$$(x + \sqrt[3]{(a^2 + x^2)})^{-\frac{3}{2}} (dx + \tfrac{1}{3}(a^2 + x^2)^{-\frac{2}{3}} 2xdx +$$

$$(x + \sqrt[3]{(a^2 + x^2})^{-\frac{1}{2}} (adx + 2bxdx) =$$

$$\frac{-(ax + bx^2)\left(dx + \frac{2xdx}{3\sqrt[3]{(a^2 + x^2)^2}}\right)}{2(x + \sqrt[3]{(a^2 + x^2)})\sqrt{(x + \sqrt[3]{(a^2 + x^2)})}}$$

$+ \dfrac{adx + 2bxdx}{\sqrt{(x + \sqrt[3]{(a^2 + x^2)})}}$, welche Formel noch auf einerley Nenner gebracht und abgekürzt werden kann.

§. 26.

In den vorigen Beyspielen kommen zwar auch Brüche in den Produkten als Factoren vor; allein es gibt noch eine bequemere Regel, das Differenzial der gebrochenen Functionen zu finden. Man setze nämlich $y = \frac{p}{q}$, wo p und q Functionen von x sind. Aus $y = \frac{p}{q}$ findet man $yq = p$, und $qdy + ydq = dp$, oder für y den Werth $\frac{p}{q}$ gesetzt

$$qdy + \frac{p}{q}dq = dp; \text{ mithin}$$

$$q^2dy + pdq = qdp, \text{ und}$$

$$q^2dy = qdp - pdq; \text{ also}$$

$$dy = \frac{qdp - pdq}{q^2} = d \,.\, \frac{p}{q}, \text{ d. h.}$$

man findet das Differenzial einer gebrochenen Funktion, wenn man den Nenner mit dem Differenziale des Zählers, und den Zähler mit dem Differenziale des Nenners mul-

multipliciret, hierauf dies letzte Produkt von dem ersten subtrahiret, und diese Differenz durch das Quadrat des Nenners dividiret.

Wäre der Zähler bloß eine beständige, und der Nenner allein eine veränderliche Größe: so braucht man nur den Zähler mit dem Differenziale des Nenners zu multipliciren, dies Produkt negativ zu nehmen, und durch das Quadrat des Nenners zu dividiren. Wäre also $y = \frac{a}{q}$, so hätte man nach der ersten Regel

$dy = \frac{qda - adq}{q^2}$; weil aber $da = 0$, mithin auch $qda = 0$ ist, so findet man $dy = -\frac{adq}{q^2}$.

Diese Regeln sollen folgende Beyspiele erläutern:

Es sey $y = \frac{x}{a+x}$, so ist $dy = \frac{(a+x)dx - xd(a+x)}{(a+x)^2}$

$= \frac{adx + xdx - xdx}{(a+x)^2} = \frac{adx}{(a+x)^2}$.

Es sey $y = \frac{a^2 + x}{a^2 - x^2}$, so ist $dy =$

$$\frac{(a^2 - x^2)\, d(a^2 + x^2) - (a^2 + x^2)\, d(a^2 - x^2)}{(a^2 - x^2)^2}$$

oder $dy = \frac{(a^2 - x^2)\, 2xdx + (a^2 + x^2)\, 2xdx}{(a^2 - x^2)^2} =$

$$\frac{2a^2xdx - 2x^3dx + 2a^2xdx + 2x^3dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{4a^2xdx}{(a^2x^2)^2}$$

Es sey $y = \frac{a}{x}$, so ist $dy = -\frac{adx}{x^2}$.

Es sey $y = \frac{b}{x^3}$, so ist $dy = \frac{-3bx^2dx}{x^6} = \frac{-3bdx}{x^4}$

Es sey $y = \frac{a+b}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$, so hat man $dy = -$

$$\frac{(a+b)d(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})^2} = \frac{-(a+b)(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx)}{\sqrt{}(x+\sqrt[3]{x^2})^2}$$

$$= -\frac{(a+b)dx}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})^2} - \frac{2(a+b)dx}{3\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})^2}$$

Es sey $y = \frac{a^2+x^2}{ax+bx^2}$, so hat man

$$dy = \frac{(ax+bx^2)\,2xdx - (a^2+x^2)(adx+bxdx)}{(ax+bx^2)^2} =$$

$$\frac{2ax^2dx + 2bx^3dx - a^3dx - 2a^2bxdx - ax^2dx - 2bx^3dx}{(ax-bx^2)^2}$$

$$= \frac{ax^2dx - a^3dx - 2a^2bxdx}{(ax-bx^2)^2}.$$

§. 27.

Die bisherigen Regeln sind hinreichend, um von einer jeden Function einer einzigen veränderlichen Größe das Differenzial derselben zu finden; sie lehren aber auch zugleich, daß das Differenzial einer jeden algebraischen Function die allgemeine Gestalt Adx haben müsse, wo A eine Function von x ist. Wäre z. B. $y = (a+x)(b-x^2)$, so hat man $dy = (a+x) \times -2xdx + (b-x^2)dx = -2axdx - 2x^2dx + bdx - x^2dx = (b - 2ax - 3x^2)dx$, wo $A = b - 2ax - 3x^2$ ist. Eine jede andere Function einer veränderlichen

Größe

Größe x, von welcher Gestalt sie auch sey, muß im Differenzial die nämliche Form Adx haben. Da es also gar keine Schwierigkeit hat, das Differenzial einer Function einer veränderlichen Größe x zu finden: so soll nunmehr auch gezeiget werden, wie das Differenzial einer Function von zwey und mehreren veränderlichen Größen gefunden werden könne.

§. 28.

Wenn V eine Function von zwey oder mehreren veränderlichen Größen x, y, z ist, so kann eine jede von den veränderlichen Größen wachsen oder abnehmen, ohne daß es die übrigen thun. Hieraus läßt sich sehr leicht erkennen, daß die Differenziale der Functionen von mehreren veränderlichen Größen ganz besondere Eigenschaften besitzen können. Man nehme an, es sey in der Function V die Größe x allein veränderlich: so muß das Differenzial von $V = Adx$ seyn; hierauf nehme man y allein als veränderlich, so wird das Differenzial von $V = Bdy$; betrachtet man alsdenn bloß z als veränderlich, so wird das Differenzial von $V = Cdz$ u. s. f. Demnach ist $dV = Adx + Bdy + Cdz$ u. f., wo A, B, C lauter Functionen von x, y und z seyn können. Wäre z. B. $V = x^2z + yxz^2 + xy^2$, so findet man x allein als veränderlich betrachtet $2zxdx + yz^2dx + y^2dx = (2zx + yz^2 + y^2)dx = Adx$; y allein als veränderlich angenommen $xz^2dy + 2xydy = (xz^2 + 2xy)dy = Bdy$; und endlich z allein als veränderlich betrachtet $x^2dz + 2zyxdz = (x^2 + 2xyz)dz = Cdz$. Folglich ist $dV = (2zx + yz^2 + y^2)dx + (xz^2 + 2xy)dy + (x^2 + 2xyz)dx = Adx + Bdy + Cdz$, wo A, B, C lauter

lauter Functionen von x, y und z sind. Um die Eigenschaften der Differenzialien der Functionen von mehreren veränderlichen Größen desto deutlicher zu entwickeln, nehme man zuerst Functionen von zwey veränderlichen Größen. Man setze also, V sey eine Function von x und y: so wird das Differenzial die allgemeine Form $dV = Adx + Bdy$ haben. Betrachtet man nämlich bloß x als veränderlich, y aber als beständig, wodurch $dy = 0$ wird: so erhält man das Differenzial von $V = Adx$; betrachtet man aber y allein als veränderlich und x als beständig, mithin $dx = 0$: so wird das Differenzial von $V = Bdy$. Da nun, wenn beyde veränderliche Größen x und y als veränderlich betrachtet werden, $dV = Adx + Bdy$ ist: so entstehet hieraus folgende allgemeine Regel, das Differenzial einer jeden Function von zwey veränderlichen Größen zu finden:

Man nehme zuerst x als veränderlich, und y als beständig, und suche das Differenzial von V, welches $= Adx$ seyn wird. Hierauf nehme man auch y als veränderlich, und x als beständig, und suche wiederum das Differenzial von V, welches Bdy seyn wird. Hieraus ergibt sich, x und y als veränderlich betrachtet, das gesuchte Differenzial $dV = Adx + Bdy$.

§. 29.

Folgende Beyspiele werden diese allgemeine Regel erläutern:

1. Es sey $V = xy$, so hat man, wenn x allein als veränderlich betrachtet wird, $dV = ydx$, und wenn

y

y allein als veränderlich angesehen wird, $dV = xdy$, folglich beyde, x und y, als veränderlich betrachtet, $dV = ydx + xdy$.

2. Es sey $V = \frac{x}{y}$, so wird, x allein als veränderlich betrachtet, $dV = \frac{dx}{y}$, y allein als veränderlich genommen, $-\frac{xdy}{y^2}$, und beyde, x und y, als veränderlich gesetzt, $dV = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

3. Es sey $V = 3x \cdot y^2 + \frac{1}{2}x^3y$, so wird in Rücksicht des x allein $dV = 3y^2dx + \frac{3}{2}yx^2dx$, in Rücksicht des y allein $dV = 6xydy + \frac{1}{2}x^3dy$, und in Rücksicht beyder, x und y, $dV = (3y^2 + \frac{3}{2}x^2)dx + (6xy + \frac{1}{2}x^3)dy$.

4. Es sey $V = \frac{2x^2}{\sqrt{(a - 3y^2)}}$, so hat man, x allein als veränderlich angenommen, $dV = \frac{4xdx}{\sqrt{(a - 2y^2)}}$, y allein als veränderlich betrachtet, $dV = \frac{6x^2ydy}{(a - 3y^2)^{\frac{3}{2}}}$ und beyde, x und y, als veränderlich angenommen,
$$dV = \frac{4xdx}{\sqrt{(a - 3y^2}} + \frac{6x^2dy}{(a + 3y^2)\sqrt{(a - 3y^2)}}.$$

5. Es sey $V = (a + bxy)(cy - fx^2)$, so wird, x allein als veränderlich angenommen, $dV = (cy - fx^2) bydx - (a + bxy) afxdx$, y allein als veränderlich betrachtet, $dV = (cy - fx^2) bxdy + (a + bxy) cdy$, und beyde, x und y, als veränderlich angenommen,

men, $dV = (cy - fx^2)\, bxdx - (a + bxy)\, 2fxdx + (cy - fx^2)\, bxdy + (a + bxy)\, cdy$.

Auf dieselbe Art läßt sich das Differenzial aller möglichen Functionen von zwey veränderlichen Größen sehr leicht finden.

§. 30.

Wenn V eine Function von drey veränderlichen Größen x, y, z ist, so hat das Differenzial derselben die allgemeine Form $dV = Adx + Bdy + Cdz$. Betrachtet man, wie vorhin, x allein als veränderlich, y und z aber als beständig: so findet man $dV = Adx$; nimmt man ferner y allein als veränderlich an, so wird $dV = Bdy$, und $dV = Cdz$, wenn bloß z als veränderlich angenommen wird. Will man also das Differenzial einer Function von drey veränderlichen Größen finden, so muß man, wie im §. 28., nach und nach eine jede dieser veränderlichen Größen ganz allein als veränderlich annehmen, und das Differenzial der Function suchen. Hierauf addiret man die auf diese Art gefundenen einzelnen Differenziale, so wird das Aggregat derselben das gesuchte Differenzial der gegebenen Function seyn. Eben so erhellet, daß auf dieselbe Art das Differenzial einer Function von so vielen veränderlichen Größen, als man will, sehr leicht gefunden werden kann. Folgende Paar Beyspiele mögen zur Erläuterung dienen:

1. Es sey $V = xyz$, so hat man, x allein als veränderlich betrachtet, $dV = yzdx$; y allein als veränderlich angenommen, $dV = xzdy$, z allein als veränderlich angesehen, $dV = xydz$, und alle drey, x, y, z, als veränderlich betrachtet, $dV = yzdx + xzdy + xydz$.

2.

2. Es sey $V = (a + x)(y^2 + bz^3)$, so hat man, x allein als veränderlich betrachtet, $(y^2 + bz^3)dx$; y allein als veränderlich angenommen, $dV = (a + x) 2ydy$; z allein als veränderlich betrachtet, $dV = (a + x) 3bz^2dz$, und alle drey, x, y und z, als veränderlich angenommen, $dV = (y^2 + bz^3)dz + (a + x) 2ydy + (a + x) 3bz^2dz$.

§. 31.

In dem allgemeinen Ausdrucke $dV = Adx + Bdy$, oder in dem Differenziale einer Function von zwey veränderlichen Größen, wo A und B Functionen sind, welche von der Beschaffenheit der Function V abhängen, müssen eben diese Functionen A und B ein gewisses Verhältniß gegen einander haben, weil sie ebenfalls von einer und der nämlichen Function V abhangen. Um das Verhältniß der beyden Functionen A und B gegen einander allgemein zu bestimmen, hat man vorzüglich auf folgendes zu sehen. Wenn V eine Function von x und y ist, so setze man, es verwandle sich V in Z, wenn bloß $x + dx$ statt x gesetzt wird; dagegen verwandle sich V in P, wenn bloß $y + dy$ statt y gesetzt wird; endlich verwandle sich V in V′, wenn sowohl $x + dx$ statt x und $y + dy$ statt y gesetzt wird. Hieraus erhellet, daß nothwendig Z in V′ sich verwandeln müsse, wenn $y + dy$ statt y in Z gesetzt wird; daß ferner P ebenfalls sich in V′ verwandeln müsse, wenn $x + dx$ statt x in P gesetzt wird. Wenn daher die Function V so differenziiret wird, daß man bloß x als veränderlich, y aber als beständig annimmt: so wird, weil V in Z verwandelt wird, wenn man $x + dx$ statt x setzet, das Differenzial

von $V = Z - V$; und da aus der allgemeinen Gestalt $dV = Adx + Bdy$ das Differenzial $= Adx$ wird, so hat man $Z - V = Adx$. Differenziiret man dagegen die Function V in Rücksicht des y allein, so wird $dV = Bdy$. Da sich nun V in P verwandelt, wenn man $y + dy$ statt y in V setzet: so muß auch das Differenzial von $= P - V = Bdy$ seyn. Sucht man nun von $Z - V = Adx$ das Differenzial, so muß man $y + dy$ statt y setzen, und hierauf von der Veränderung $Z - V$ subtrahiren; setzt man aber $y + dy$ statt y in Z, so verwandelt sich Z in V', und setzt man $y + dy$ statt y in V, so verwandelt sich V in P; demnach wird aus $Z - V$ die Veränderung $V' - P$, und hievon $Z - V$ subtrahirt, das Differenzial von $Z - V = V' - P - Z + V = d \,.\, Adx$. Um ferner das Differenzial von $P - V$ oder von Bdy zu finden, muß man x allein als veränderlich annehmen. Setzt man nun $x + dx$ in P, so verwandelt sich P in V', und setzt man $x + dx$ statt x in V: so verwandelt sich V in Z; mithin wird dadurch $P - V$ in $V' - Z$ verwandelt. Subtrahirt man von dieser Veränderung $V' - Z$ die Größe $P - V$, so erhält man das Differenzial von $P - V$ oder von Bdy; also ist $V' - Z - P + V = d \,.\, Bdy$. Da nun $V' - P - Z + V = V' - Z - P + V$, so erhellet, daß auch $d \,.\, Adx = d \,.\, Bdy$ sey. Hat man also das Differenzial der Function V von zwey veränderlichen Größen x und y, oder $dV = Adx + Bdy$ gefunden: so muß das Differenzial von Adx dem Differenziale von Bdy gleich seyn, wenn man in Adx die Größe y allein als veränderlich, und in Bdy die Größe x allein als veränderlich betrachtet. Hieraus ist nun

klar,

klar, was für eine Beziehung die beyden Functionen A und B gegen einander haben. Diese Beziehung wird besonders in der Integralrechnung von der größten Wichtigkeit seyn. Es ist nöthig, das Gesagte durch einige Beyspiele zu erläutern.

1. Es sey $V = 3xy^2 + 5x^3y$, so hat man $dV = (3y^2 + 15x^2y)dx + (6xy + 5x^3)dy$, wo $A = 3y^2 + 15x^2y$, und $B = 6xy + 5x^3$ ist. Man differenziire A bloß in Rücksicht des y allein: so hat man

$dA = (6y + 15x^2)dy$, und

$dAdx = (6y + 15x^2)dydx$; ferner differenziire man B bloß in Rücksicht des x allein, so findet man $dB = (6y + 15x^2)dx$, und

$dBdy = (6y + 15x^2)dxdy$;

mithin sind beyde Differenziale einander gleich.

2. Es sey $V = \frac{a+x}{b+y}$, so hat man $dV = \frac{(b+y)dx - (a+x)dy}{(b+y)^2}$, wo also $A = \frac{(b+y)}{(b+y)^2}$, und $B = \frac{-(a+x)}{(b+y)^2}$ ist. Differenziiret man nun Adx in Rücksicht des y allein, so findet man $dA = \frac{-dy}{(b+y)^2}$ also $dAdx = \frac{-dydx}{(b+y)^2}$. Differenziiret man ferner Bdy in Rücksicht des x allein, so hat man $dB = \frac{-dx}{(b+y)^2}$, also $dBdy = \frac{-dxdy}{(b+y)^2}$; also wiederum $d.Adx = d.Bdy$.

3. Es sey $V = (ax + by)(cxy + gy^2)$, so ist

 dV.

$dV = (ax + by)cydx + (cxy + gy^2)adx + (ax + by)(cx + 2gy)dy + (cxy + gy^2)bdy$, mithin $A = (ax + by)cy + (cxy + gy^2)a$, und $B = (ax + by)(cy + 2gy) + (cxy + gy^2)b$. Differenziiret man nun A in Rücksicht des y allein, so erhält man $dA = (ax + by)cdy + cbydy + (cax + 2agy)dy = (2acx + 2bcy + 2agy)dy$, und $dAdx = (2acx + 2bcy + 2agy)dxdy$; differenziiret man ferner B in Rücksicht des x allein, so ergibt sich $dB = (ax + by)cdx + (cx + 2gy)adx + cbydx = (2acx + 2bcy + 2agy)dx$, und $dBdy = (2acx + 2bcy + 2agy)dxdy$, mithin $d.Adx = d.Bdy$.

§. 32.

Weil also jederzeit in einer Function von zwey veränderlichen Größen $d.Adx = d.Bdy$ seyn muß, so findet man hieraus

$$\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right).$$

Diese Ausdrücke sollen bloß folgende Bedeutung haben. Wenn man die Function A so differenziiret, daß y allein als eine veränderliche Größe betrachtet, und das Differenzial durch dy dividirt wird: so soll man jederzeit eine endliche Größe erhalten; und wenn man die Function B bloß in Rücksicht des x allein differenziiret, und dieses Differenzial durch dx dividirt: so soll dadurch dieselbe endliche Größe entstehen. In dem ersten Beyspiele des vorigen §. war $dA = (6y + 15x^2)dy$, mithin $\left(\frac{dA}{dy}\right) = 6y + 15x^2$, und $dB = (6y + 15x^2)dx$,

also

also $\left(\frac{dB}{dx}\right) = 6y + 15x^2$, und daher $\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$. Dieselbe Eigenschaft findet in allen möglichen Functionen von zwey veränderlichen Größen Statt.

§. 33.

Das Verhalten der Functionen A und B gegen einander ist besonders in homogenen Functionen merkwürdig, d. h. in solchen Functionen, wo ein jedes Glied gleich viele veränderliche Factoren enthält. Es sey nämlich V eine homogene Function von x und y von n Dimensionen, so läßt sich das Verhalten des A und B gegen einander auf diese Art bestimmen: Man setze in der Function V die Größe $y = xz$, so muß dadurch die Function V, weil sie eine homogene Function von n Dimensionen seyn soll, die allgemeine Gestalt von Zx^n erhalten, wo Z eine Function von z ist. Es sey z. B. $V = 2x^2y + 3y^3$, also eine homogene Function von 3 Dimensionen: so wird, $y = xz$ gesetzt, $V = 2x^3z + 3x^3z^3 = (2z + 3z^3)x^3 = Zx^3$, wo $Z = 2z + 3z^3$, also eine Function von z ist. Weil solchergestalt $V = Zx^n$, und Z eine Function von z ist: so muß $dZ = Qdz$ seyn, wo Q wieder eine Function von z ist. Nun hat man $dV = x^ndz + nZx^{n-1}dx = Qx^ndz + nZx^{n-1}dx$. Ferner ist aber auch die allgemeine Form des Differenzials einer jeden Function V von zwey veränderlichen Größen $dV = Adx + Bdy$, und wenn $y = xz$, mithin $dy = xdz + zdx$ ist, $dV = Adx + Bxdz + Bzdx$: so folgt nothwendig, daß $Qx^ndz + nZx^{n-1}dx = Adx + Bxdz + Bzdx$ seyn müsse. Hieraus ergibt

sich

sich also $nZx^{n-1} = A + Bz$, und
$$Qx^n = Bx.$$

Es war aber auch $V = Zx^n$, mithin $\frac{V}{x} = Zx^{n-1}$,

und $\frac{nV}{x} = nZx^{n-1}$; demnach $A + Bz = \frac{nV}{x}$, und,

da $z = \frac{y}{x}$ ist, $A + B\frac{y}{x} = \frac{nV}{x}$. Hieraus findet man $Ax + By = nV$, wo sich das Verhalten des A und B gegen einander sehr leicht bestimmen läßt. Da endlich $Qx^n = Bx$ ist, so folgt, daß nicht allein Bx, sondern auch By und Ax Functionen von n Dimensionen von x und y sind.

Wenn man also in dem Differenzìale einer homogenen Function von x und y statt dx und dy die Größen x und y setzet, so ist der daher entstehende Ausdruck einer homogenen Function mit der Zahl der Dimensionen multiplicirt gleich. Einige Beyspiele werden dies Allgemeine mit vieler Leichtigkeit erläutern.

1. Es sey $V = 2x^2y + 3y^3$, wo $n = 3$ ist, so hat man
$$dV = 4yxdx + (2x^2 + 9y^2)dy,$$
und wenn statt dx und dy die Größen x und y gesetzt werden,

$$\begin{array}{l} 4yx^2 \\ \underline{2yx^2 + 9y^3} \\ 6yx^2 + 9y^3 = 3 \cdot 2yx^2 + 3 \cdot 3y^3 = 3V. \end{array}$$

2. Es sey $V = \frac{x^3 + y^3}{x - y}$, wo also $n = 2$ ist: so hat man $dV =$

$(2x^3$

$$\frac{(ax^3 - 3x^2y - y^3)dx + (3y^2x - 2y^3 + x^3)dy}{(x-y)^2}.$$

Setzt man nun in diesen Ausdruck x und y statt dx und dy, so ergibt sich

$$\frac{2x^4 - 3x^3y - xy^3 + 3y^3x - 2y^4 + x^3y}{(x-y)^2} =$$

$$\frac{2x^4 - 2x^3y + 2y^3x - 2y^4}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)(2x^3 + 2y^3)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2y^3}{x - y} = 2V.$$

3. Es sey $V = \frac{y^4}{\sqrt{(x^2 - y^2)}}$, wo $n = 3$ ist: so hat man $dV =$

$$\frac{4y^3dy\sqrt{(x^2 - y^2)} - y^4(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(xdx - ydy)}{x^2 - y^2}$$

$$= \frac{4y^3dy\,(x^2 - y^2) - y^4xdx + y^5dy}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{4y^3x^2dy - 3y^5dy - y^4xdx}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun setze man x und y statt dx und dy, so ergibt sich

$$\frac{4y^4x^2 - 3y^6 - y^4x^2}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3y^4(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{3y^4}{\sqrt{(x^2 - y^2)}} = 3V.$$

§. 34.

Die bisherigen Regeln sind hinreichend, um die Differenziale aller möglichen algebraischen Functionen von einer

einer einzigen oder mehreren veränderlichen Größen zu finden. Oft ist es aber auch nöthig, von einer Function das zweyte, dritte und andere höhere Differenziale zu suchen. Auch hierzu sind keine andern Regeln nöthig, als diejenigen, welche zur Findung der ersten Differenziale sind gegeben worden. Wird hiebey angenommen, daß der unendlich kleine Zuwachs dx wieder veränderlich ist, mithin von neuem um ein unendlich Kleines wachsen kann: so bezeichnet man den zweyten unendlich kleinen Zuwachs mit d^2x, den dritten mit d^3x, und überhaupt den nten mit d^nx. Bey der Differenziirung selbst behandelt man dx, d^2x, d^3x u. s. nebst ihren Potenzen eben so, wie die endlichen veränderlichen Größen, und sucht auf dieselbe Art, wie die ersten Differenziale der Functionen gefunden werden, die höhern Differenziale. Nur einige Beyspiele werden hinreichend seyn, das ganze Verfahren leicht zu erkennen.

1. Es sey $z = ax$, so hat man $dx = adx$; $d^2z = ad^2x$; $d^3z = ad^3x$; $d^4z = ad^4x$; $d^nz = ad^nx$.

2. Es sey $z = \frac{1}{2}x^2$, so ist $dz = xdx$; $d^2z = dx^2 + xd^2x$; $d^3z = 2dxd^2x + dxd^2x + xd^3x = 3dxd^2x + xd^3x$; $d^4z = 3d^2x^2 + 3dxd^3x + dxd^3x + xd^4x = 3d^2x^2 + 4dxd^3z + xd^4x$.

3. Es sey $z = \frac{x}{b+x}$, so ist $dz = \frac{(b+x)dx - xdx}{(b+x)^2}$

$$= \frac{bdx}{(b+x)^2};\ d^2z = \frac{(b+x)^2bd^2x - 2(b+x)bdx^2}{(b+x)^4}$$

$$= \frac{(b+x)bd^2x - bdx^2}{(b+x)^3} = \frac{b^2d^2x + bxd^2x - bdx^2}{(b+x)^3}$$

d^3z

$$d^3z = \frac{(b+x)^3 (b^2d^3x + bdxd^2x + bxd^3x - 2bdxd^2x)}{(b+x)^6}$$

$$\frac{-3(b+x)^2dx\ (b^2d^2x + bxd^2x - bdx^2)}{(b+x)^6} =$$

$$\frac{(b^2d^3x + bxd^3x - bdxd^2x)(b+x) -}{(b+x)^4} -$$

$$\frac{3dx(b^2d^2x + bd^2x - bdx^2)}{(b+x)^4} \text{ u. f.}$$

4. Es sey $z = \frac{d^2x}{dx^2}$, so ist $dz = \frac{dx^2d^3x - 2dxd^2x^2}{dx^4}$

$$= \frac{dxd^3x - 2d^2x^2}{dx^3}; \quad d^2z = \frac{dx^3(d^2xd^3x + dxd^4x}{dx^6}$$

$$\frac{-4d^2xd^3x) - 3dx^2d^2x\,(dxd^3x - 2d^2x^2)}{dx^6} = \frac{dx(d^2xd^3x}{dx^4}$$

$$\frac{+ dxd^4x - 4d^2xd^3x) - 3d^2x(dxd^3x - 2d^2x^2)}{dx^4} \text{ u. f.}$$

§. 35.

Wenn man aber dx nicht als veränderlich, sondern als beständig annimmt: so fallen alle diejenigen Glieder weg, welche mit d^2x, d^3x u. f. sind multiplicirt worden, und die höhern Differenziale werden dadurch viel einfacher, ja in vielen Fällen kommt man zuletzt durchs Differenziiren auf eine endliche Größe. Ist z. B. $z = y^2$, so hat man $dz = 2xdx$ und $d^2z = 2dx^2$, wenn dx als beständig angenommen wird, mithin eine beständige Größe. Es sey ferner $z = \sqrt{x}$, so hat man dz

$$= \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \quad d^2z = -\frac{dx^2}{4x\sqrt{x}}; \quad d^3z = \frac{dx^3}{8x^2\sqrt{x}} \text{ u. f. f.}$$

 Eben

Eben so leicht findet man von allen möglichen Functionen die Differenziale, wenn dx als beständig angenommen wird.

§. 36.

Wenn die höhern Differenziale einer Function von zwey veränderlichen Größen gesucht werden sollen, so ist entweder nur das eine Differenzial veränderlich, und das andere beständig, oder es sind beyde Differenziale veränderlich. Es ist nämlich ganz gleichgültig, welches Differenzial man als veränderlich betrachten will, indem es ganz willkührlich ist, auf welche Art man die auf einander folgenden Werthe der veränderlichen Größe will wachsen lassen. Die Differenzialien beyder veränderlichen Größen x und y kann man aber nicht als beständig annehmen, weil dabey vorausgesetzet würde, daß beym gleichförmigen Wachsthume der einen veränderlichen Größe auch die andere veränderliche Größe gleichförmig wachsen müßte; mithin würden die Werthe der einen veränderlichen Größe von den Werthen der andern abhangen, welches aber nicht angenommen werden kann. Hieraus folgt, daß entweder nur ein einziges Differenzial, oder alle beyde Differenziale als veränderlich angenommen werden müssen. Weiß man nun die Differenziale nach der Voraussetzung zu finden, wenn die beyden unendlich kleinen Größen dx und dy als veränderlich angenommen werden: so wird es auch keine Schwierigkeit haben, die Differenziale der Function zu bestimmen, wenn nur das eine Differenzial der veränderlichen Größen als veränderlich angenommen wird. Das zweyte Differenzial einer Function wird aber jederzeit aus dem ersten, das

dritte

dritte aus dem zweyten Differenziale u. s. f. nach densel-
ben Regeln gefunden, welche zur Bestimmung der ersten
Differenziale der Functionen gegeben sind. Es ist also
nur nöthig, einige Beyspiele zur Erläuterung zu geben.

1. Es sey $V = xy$, so hat man $dV = xdy + ydx$. Betrachtet man nun dx und dy als veränderlich, so erhält man

$$d\,.\,xdy = dxdy + xd^2y$$
$$d\,.\,ydx = dxdy + yd^2x, \text{ also}$$
$$d^2V = 2dxdy + xd^2y + yd^2x.$$

Ferner ist $d\,.\,2dxdx = 2dyd^2x + 2dxd^2y$

$$d\,.\,xd^2y = xd^3y + dxd^2y$$
$$d\,.\,yd^2x = yd^3x + dyd^2x;$$ demnach

wird $d^3V = 3dyd^2x + 3dxd^2y + xd^3y + yd^3x$ u. s. f.

2. Es sey $V = \frac{x}{y}$, so ist $dV = \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}$. Nun ist $d\,.\,\frac{dx}{y} = \frac{yd^2x - dxdy}{y^2}$ und $d\,.\,-\frac{xdy}{y^2} = -\frac{y^2dxdy - y^2xd^2y + 2xydy^2}{y^4} = -\frac{ydxdy - yxd^2y + 2xdy^2}{y^3}$, und daher $d^2V = \frac{yd^2x - dxdy}{y^2} - \frac{ydxdy - yxd^2y + 2xdy^2}{y^3}$ u. s. f.

Gesetzt auch, die gegebene Function von zwey ver-
änderlichen Größen enthielte schon Differenziale der ver-
änderlichen Größen, so lassen sich die höhern Differenzi-
ale derselben auf dieselbe Art finden, weil sowohl dx,
als auch dy und alle Potenzen davon wie veränderliche
endliche Größen behandelt werden. Folgende Beyspiele,

welche besonders bey Bestimmung krummer Linien sehr brauchbar sind, werden das sehr leichte Verfahren zeigen.

1. Es sey $V = \frac{ydx}{dy}$, so hat man $dV =$
$\frac{dxdy^2 + ydyd^2x - ydxd^2y}{dy^2} = dx + \frac{yd^2x}{dy} - \frac{ydxd^2y}{dy^2}$. Nun ist $d \,.\, dx = d^2x$.

$$d \,.\, \frac{yd^2x}{dy} = \frac{dy^2d^2x + ydyd^3x - yd^2xd^2y}{dy^2} = d^2x + \frac{yd^3x}{dy} - \frac{yd^2xd^2y}{dy^2}.$$

$$d \,.\, -\frac{ydxd^2y}{dy^2} = -\frac{dxdy^3d^2y - yd^2xdy^2d^2y}{dy^4}$$
$$\frac{-ydxdy^2d^3y}{dy^4} + \frac{2ydxd^2y^2dy}{dy^4} = \frac{-dxd^2y}{dy} - \frac{yd^2xd^2y}{dy^2} - \frac{ydxd^3y}{dy^2} + \frac{2ydxd^2y^2}{dy^3}$$; mithin $d^2V =$
$$2d^2x + \frac{yd^3x}{dy} - \frac{2yd^2xd^2y}{dy^2} - \frac{dxd^2y}{dy} - \frac{ydxd^3y}{dy^2} + \frac{2ydxd^2y^2}{dy^3}$$ u. s. f.

2. Es sey $V = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, so hat man $dV = \frac{dxd^2x + dyd^2y}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$; ferner ist $d^2V =$
$$\frac{d^2x^2 + dxd^3x + d^2y^2 + dyd^3y}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} - \frac{(dxd^2x + dyd^2y)^2}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Bey den bisherigen Beyspielen ist kein einziges Differen-

zial als beständig angenommen. Sollte aber eines von beyden Differenzialien, entweder dx oder dy als beständig angenommen werden: so würden alle diejenigen Glieder wegfallen, welche mit den höhern Differenzialien von dx oder dy sind multiplicirt worden. Wenn z. B. $V = xy$ ist, und dx als beständig angenommen wird: so hat man $d^2V = 2dxdy + xd^2y$.

§. 37.

Weil die Werthe der veränderlichen Größen nach keinem bestimmten Gesetze wachsen oder abnehmen, so können auch die zweyten und höhern Differenzialien gar keine bestimmte Bedeutung haben. Wenn also in einer gegebenen Differenzialformel die zweyten oder höhern Differenzialien enthalten sind, so hat diese gar keinen bestimmten Werth, indem sie bald diese, bald jene Bedeutung erhalten kann, je nachdem man dieses oder jenes Differenzial als beständig annimmt. Allein es gibt doch eine allgemeine Methode, alle höhern Differenzialien in solchen Formeln wegzuschaffen, und sie daher in den Rechnungen brauchbar zu machen. Man setze zuerst, die gegebene Differenzialformel enthalte bloß die einzige veränderliche Größe x nebst ihren höhern Differenzialien, so kann diese gar keinen bestimmten Werth haben, wofern nicht irgend ein erstes Differenzial als beständig angenommen wird. Es sey also z die Größe, deren erstes Differenzial oder dz als beständig betrachtet wird. Nun setze man $dx = pdz$, so ist p eine endliche Größe, deren Differenzial von der unbestimmten Bedeutung der zweyten Differenzialien nicht abhängig ist, und es muß daher $\frac{dz}{dz} = p$ eine endliche Größe seyn. Man setze ferner

ner $dp = qdz$, $dq = rdz$, $dr = sdz$ u. s. f., so werden q, r, s u. s. f. lauter endliche Größen, deren Werthe keine ungewisse Bedeutung haben. Weil nun $dx = pdz$, so hat man $d^2x = dpdz = qdz^2$; $d^3x = dqdz^2 = rdz^3$; $d^3x = drdz^3 = sdz^4$ u. s. f. Setzt man also alle diese Werthe statt d^2x, d^3x, d^4x u. s. f. in die gegebene Differenzialformel, so verwandelt sich dieselbe in einen Ausdruck, welcher allein endliche Größen und das erste Differenzial dz enthält, und er hat folglich keine unbestimmte Bedeutung mehr. Ist also x eine Function von z, so läßt sich auf diese Art die Größe x ganz wegschaffen, so daß bloß die Größe z mit dz in der Differenzialformel zurückbleibt. Wenn aber x eine Function von z ist, so ist auch z eine Function von x. Man kann auch die Größe x mit dx in der Differenzialformel beybehalten, wenn man statt der durch die Substitution gesetzten Größen z und dz ihre durch x und dx ausgedruckten Größen wieder herstellt. Um dies durch ein Beyspiel zu erläutern, sey $z = x^3$, und nehme an, das erste Differenzial von x^3 sey beständig. Hiernach hat man $dz = 3x^2dx$, also $dx = \frac{dz}{3x^2}$, und es ist $p = \frac{1}{3x^2}$; mithin wird $dp = -\frac{6xdx}{9x^4} = -\frac{2dx}{3x^3} = qdz = 3x^2q \cdot dx$, also erhält man $q = \frac{-2}{9x^5}$, und $dq = +\frac{90x^4dx}{81x^{10}} = +\frac{10dx}{9x^6} = rdz = 3x^2rdx$, und hieraus erhält man ferner $r = \frac{10}{27x^8}$ u. s. f.

Wenn

Wenn also das Differenzial von x^3 beständig angenommen wird, so ist $d.3x^2dx = 6xdx^2 + 3x^2d^2x = o$, und hieraus findet man

$$d^2x = -\frac{6xdx^2}{3x^2} = -\frac{2dx^2}{x};$$

$$d^3x = -\frac{90x^4dx^3}{9x^6} = -\frac{10dx^3}{x^2};$$

$$d^4x = -\frac{80dx^3}{x^3} \text{ u. s. f.}$$

Man mag nun für dx einen Werth setzen, welchen man will, so werden die höhern Differenziale von dx jederzeit bestimmte endliche Werthe erhalten.

§. 38.

Wenn in einer Differenzialfunction zwey veränderliche Größen x und y vorkommen, und man betrachtet das eine Differenzial bloß als veränderlich: so lassen sich die höhern Differenziale desselben auf dieselbe Art, wie im vorigen §. wegschaffen. Nimmt man nämlich dx als beständig an, so setze man $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, $dr = sdx$ u. s. f., und man bekommt hieraus $d^2y = dpdx = qdx^2$, $d^3y = dqdx^2 = rdx^3$, $d^4y = drdx^3 = sdx^4$ u. s. f.; nimmt man hingegen dy als beständig an, so setzt man nun $dx = pdy$, $dp = qdy$; $dq = rdy$ u. s. f. Gesetzt aber auch, man nähme irgend ein anderes Differenzial als beständig an, so muß man auf die nämliche Weise sowohl die höhern Differenziale von dx, als auch die von dy wegschaffen; hierdurch erhält man alsdenn einen Ausdruck, welcher außer endlichen Größen bloß das Differenzial der eingeführten veränderlichen Größe enthält, und welcher daher

jeder-

jederzeit einen bestimmten Werth hat. Dies sehr leichte Verfahren soll durch verschiedene Beyspiele erläutert werden.

1. Es sey in der Function $\frac{dx^2 d^2y}{dy}$ das Differenzial dx beständig. Setzt man nun $dy = pdx$ und $dp = qdx$, so hat man $d^2y = qdx^2$, und es verwandelt sich jene Function in diese: $\frac{q \cdot dx^4}{pdx} = \frac{q}{p} \cdot dx^3$.

2. Es sey in der Differenzialfunction $\frac{dy^2 - dx^2}{d^2x}$ das Differenzial dy beständig, so setze man $dx = pdy$, $dp = qdy$. Hieraus ergibt sich $d^2x = qdy^2$, und $dx^2 = p^2dy^2$; demnach verwandelt sich jene Function in diese: $\frac{dy^2 - p^2dy^2}{qdy^2} = \frac{1 - p^2}{q}$.
Wollte man hier, wie im vorigen Beyspiele, $dy = pdx$, und $dp = qdx$ setzen: so würde man, weil dy beständig ist, erhalten $d \cdot pdx = dpdx + pd^2x = 0$, folglich $d^2x = -\frac{qdx^2}{p}$, und die Function würde sich in diese verwandeln: $-\frac{p^2dx^2 - dx^2}{\frac{qdx^2}{p}} =$

$$\frac{-(p^2 - 1)pdx^2}{qdx^2} = \frac{-(p^2 - 1)p}{q}.$$

3. Es sey in der Function $\frac{xd^2y + yd^2x}{dxdy}$ die Function ydx als beständig angenommen, so setze man abermals

mals $dy = pdx$, $dp = qdx$. Weil ydx beständig ist, so wird $d \,.\, ydx = dydx + yd^2x = 0$, oder $pdx^2 + yd^2x = 0$, folglich

$$d^2x = -\frac{pdx^2}{y}, \text{ und}$$

$$d^2y = dpdx + pd^2x = qdx^2 - \frac{p^2dx^2}{y}.$$

Substituiret man diese Werthe, so verwandelt sich die Function in diese:

$$(qxdx^2 - \frac{p^2xdx^2}{y} - pdx^2) : pdx^2 = \frac{qx}{p} - \frac{px}{y} - 1.$$

4. Es sey in der Differenzialfunction $\frac{dx^2 + dy^2}{d^2x}$ die Function $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig, so nehme man abermals $dy = pdx$, $dp = qdx$; hierdurch erhält man $dy^2 = p^2dx^2$, und es verwandelt sich die Function $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ in diese:

$$\sqrt{(dx^2 + p^2dx^2)} = dx\sqrt{(1 + p^2)}.$$

Da nun dieses Differenzial beständig ist, so ergibt sich

$$d(dx\sqrt{(1 + p^2)}) = d^2x\sqrt{(1 + p^2)} + \frac{pdpdx}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

$$= d^2x\sqrt{(1 + p^2)} + \frac{pqdx^2}{\sqrt{(1 + p^2)}} = 0, \text{ und daraus}$$

$$d^2x = -\frac{pqdx^2}{1+p^2}.$$

Demnach verwandelt sich die gegebene Differenzialfunction in folgende:

$$-(dx^2 + p^2dx^2) : \frac{pqdx^2}{1+p^2} = -\frac{(1 + p^2)^2}{pq}.$$

Diese Beyspiele zeigen deutlich, daß eine Differenz-

zialfunction immer andere und andere Werthe bekommen müsse, je nachdem man dieses oder jenes Differenzial als beständig annimmt. Zugleich erhellet hieraus die leichte Methode, die höhern Differenziale wegzuschaffen, und daher die Differenzialfunctionen in den Rechnungen brauchbar zu machen.

§. 39.

Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, wie der verwandelte Ausdruck einer Differenzialfunction auf die erste Form wieder zurückgebracht werden könne, indem statt der veränderlichen Größen p, q, r, s u. f. die gleichen höhern Differenziale substituirt werden. Dabey ist es nun gleichgültig, was man für ein Differenzial als beständig annehmen will; ja es ist nicht einmal nöthig, ein Differenzial als beständig zu betrachten, und gleichwohl haben die daher entstandenen Ausdrücke keine unbestimmte Bedeutung. Hat man also $pdx = dy$, $qdx = dp$, $rdx = dq$, $sdx = dr$ u. f. gesetzt, so hat man $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{dp}{dx} = q$; $\frac{dq}{dx} = r$; $\frac{dr}{dx} = s$ u. s. f. Sollen nun die gleichen Werthe in höhere Differenzialien für q, r, s u. f. wieder substituiret werden, in der Voraussetzung, daß gar kein Differenzial als beständig betrachtet wird: so ergibt sich

$$dp = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^2}, \text{ und}$$

$$q = \frac{dp}{dx} = d\left(\frac{dy}{dx}\right) : dx = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3};$$

mit-

mithin $dq = d \cdot \left(\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}\right) =$
$\frac{dx^2d^3y - 3dxd^2xd^2y + 3dyd^2x^2 - dxdyd^3x}{dx^4}$, mithin $r = \frac{dx^2d^3y - 3dxd^2xd^2y + 3dyd^2x^2 - dxdyd^3x}{dx^5}$

Nähme man aber die Voraussetzung an, daß dx als beständig zu betrachten wäre: so würden alle diejenigen Glieder wegfallen, welche mit d^2x, d^3x u. s. multiplicirt sind, und hiernach würde seyn

$$dp = \frac{d^2y}{dx}, \text{ und } q = \frac{d^2y}{dx^2};$$

$$dq = \frac{d^3y}{dx^2}, \text{ und } r = \frac{d^3y}{dx^3} \text{ u. s. f.}$$

Würde endlich vorausgesetzet, daß dy beständig seyn sollte: so müßten alle Glieder wegfallen, welche mit d^2y, d^3y u. s. multiplicirt sind, und hieraus erhielte man

$$dp = -\frac{dyd^2x}{dx^2} \text{ und } q = -\frac{dyd^2x}{dx^3};$$

$$dq = \frac{3dyd^2x^2 - dxdyd^3x}{dx^4} \text{ und } r =$$
$$\frac{3dyd^2x^2 - dxdyd^3x}{dx^5} \text{ u. s. f.}$$

§. 40.

Folgende Beyspiele werden die im vorigen §. angeführten Substitutionen erläutern:

1. Es sey die Differenzialfunction $\frac{dx^2d^2y}{dy}$ gegeben, wo dx als beständig angenommen ist. Um dieselbe in

 eine

eine andere zu verwandeln, worin gar kein Differenzial als beständig vorkommt, setze man $dy = pdx$, und $dp = qdx$, wodurch $d^2y = dpdx = qdx^2$, und die Function in $\frac{dx^2 \cdot qdx^2}{pdx} = \frac{q}{p} \cdot dx^3$ verwandelt wird. Nun substituire man für p und q diejenigen Werthe, welche sie erhalten, wenn kein Differenzial als beständig angenommen wird: so findet man den Ausdruck

$$\frac{dx^4d^2y - dyd^2xdx^3}{dx^3} : \frac{dy}{dx} = \frac{dx^2d^2y - dyd^2xdx}{dy},$$

welcher der gegebenen Differenzialformel gleich, und worin kein Differenzial mehr als beständig enthalten ist.

2. Es sey die Function $\frac{dy^2 - dx^2}{d^2x}$ gegeben, wo dy als beständig angenommen ist. Setzt man nun $dy = pdx$ und $dp = qdx$, so verwandelt sich die Function in $\frac{1 - p^2}{q}$, Nun setze man statt p und q die höhern gleichen Differenzjale, wenn weder dx noch dy als beständig angenommen ist. Dadurch verwandelt sich die gegebene Function in diesen Ausdruck:

$$\left(1 - \frac{dy^2}{dx^2}\right) : \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3} = \frac{dx(dx^2 - dy^2)}{dxd^2y - dyd^2x},$$

welcher den nämlichen Werth, als die gegebene Differenzialfunction hat.

Vier-

Vierter Abschnitt.

Von der Differenziation der transcendenten Functionen.

§. 41.

Die transcendenten Functionen sind in der höhern Mathematik ein Gegenstand von der größten Wichtigkeit. Dahin gehören die **Exponentialgrößen** und die **trigonometrischen Größen**. Zur Erfindung ihrer Differenziale sind ganz andere Regeln nothwendig, als diejenigen, welche zur Erfindung der Differenziale der algebraischen Functionen sind gegeben worden. Zuerst sollen die Differenziale der Exponentialgrößen untersuchet werden. Unter den Exponentialgrößen überhaupt versteht man eine Potenz, welche einen veränderlichen Exponenten hat, wie z. B. a^x. Indessen ist nicht nöthig, daß die Wurzel der Potenz eine beständige Größe ist, sie kann auch eine veränderliche, ja der Exponent selbst eine Exponentialgröße seyn, wie z. B. y^x und y^{x^z}. Soll aber die Wurzel eine beständige Größe seyn, wie a^x, so kann man die beständige Größe a als die Grundzahl eines logarithmischen Systems, und den Exponenten x als den Logarithmen der Zahl a^x annehmen. Um nun das Differenzial einer logarithmischen Größe zu finden, kommt es vorzüglich darauf an, daß man die Eigenschaften der logarithmischen Linie kenne. Zu dem Ende nehme man auf der Abscissenlinie (Fig. 3.) AQ einen willkührlichen Punkt B zum Anfangspunkte der Abscissen an, und schneide auf selbiger vor- und rückwärts die gleichen Theile $BD = DF = FH = HA$ u. s. $= DB$

=

$= BK = KM = MO = OQ$ u. s. ab; durch die Punkte B, D, F, H, A, K, M, O, Q u. s. setze man alsdenn senkrechte Linien auf AQ so auf, daß sie als Ordinaten in einem stetigen geometrischen Verhältnisse fortgehen: so kann man durch die Endpunkte der Ordinaten eine krumme Linie hindurchführen, welche die logarithmische Linie genennt wird. Setzt man $BC = 1$, und nimmt man $BC = BK = KM = MO = OQ$ u. s.: so stellen die Abscissen BK, BM, BO, BQ u. s. von dem Punkte B angerechnet die Logarithmen vor, welche zu den Ordinaten KL, MN, OP, QR u. s. gehören, und es wird KL die Basis des logarithmischen Systems seyn. Denn die Ordinaten KL, MN, OP, QR u. s. gehen in einem stetigen geometrischen Verhältnisse fort, und bilden daher folgende geometrische Progression:

BC, KL, MN, OP, QR u. s. f.

Setzt man also $BC = BK = 1$, und $KL = a$: so gehören zu den Abscissen

BK, BM, BO, BQ u. s. oder

zu 0 1, 2, 3, 4 u. s. x

die Ordinaten BC, KL, MN, OP, QR u. s. oder

$1, 2, a^2, a^3, a^4$ u. s. a^x;

mithin ist $y = a$, wenn $x = 1$, $y = a^2$, wenn $x = 2$, $y = a^3$, wenn $x = 3$, und überhaupt $y = a^x$. Alles stimmt also vollkommen mit demjenigen überein, was von den Logarithmen und den dazu gehörigen Zahlen Statt findet. Die Gleichung für eine jede logarithmische Linie ist also $y = a^x$.

§. 42.

Es sey (Fig. 4.) C irgend ein Punkt in einer logarith-

garithmischen Linie, CA für diesen Punkt C die Tangente, PB = x die Abscisse, und BC = y die dazu gehörige Ordinate: so ist, wie bekannt, BA die Subtangente. Nimmt nun die Abscisse PB um BE = CG = Δx zu, so wächst auch die Ordinate y um GF = Δy. Durch die beyden Punkte F und C ziehe man die gerade Linie FD, welche die Abscissenlinie PN in D trifft. Die beyden Dreyecke FCG und CDB sind einander ähnlich, und man hat PG : CB = CG : BD.

Vermöge der Erklärung der logarithmischen Linie ist CB = a^x, mithin EF = EG + GF = BC + GF = $a^x + \Delta^x$, und EF — CB = FG = $a^x + \Delta^x$ — $a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1) = \Delta(a^x)$. Demnach erhält man folgende Proportion:

$\Delta(a^x) : a^x = \Delta x : BD$, oder

$a^x(a^{\Delta x} - 1) : a^x = \Delta x : BD$, oder

$a^{\Delta x} - 1 : 1 = \Delta x : BD$, und daher

$$BD = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}.$$

Wenn EF der Ordinate näher rückt, so fällt der Durchschnittspunkt A dem Punkte D auch näher, und BA kommt dem Werthe BD näher. Rückt EF der Ordinate CB unendlich nahe, so ist auch BD von BD unendlich wenig verschieden, mithin ist die Subtangente

$$BD = \frac{dx}{a^{dx} - 1} = \frac{a^x dx}{d \,.\, a^x} = y \,.\, \frac{dx}{dy}.$$

Diese Subtangente ist aber in einerley logarithmischen Linien eine beständige Größe, welche k heißen mag; daher man Subtangente $= y \,.\, \frac{dx}{dy} = k$.

Auch

Auch nennt man die Subtangente der logarithmischen Linie den **Model** oder die **beständige Zahl**.

§. 43.

Aus $y \cdot \frac{dx}{dy} = k$ findet man $ydx = kdy$ und $dx = \frac{kdy}{y}$. Für die logarithmische Linie ist aber $y = a^x$, mithin $l \cdot y = x$, und $d \cdot l \cdot y = dx$; also ist $d \cdot l \cdot y = \frac{kdy}{y}$.

Man findet also das Differenzial von $l \cdot y$, wenn man das Differenzial der Größe y nimmt, dasselbe durch y dividiret, und den Quotienten mit der Subtangente des logarithmischen Systems multiplicirt.

In dem natürlichen Logarithmensysteme setzt man $k = 1$; mithin wird in diesem Systeme $d \cdot ly = \frac{dy}{y}$ oder man findet das Differenzial von $l \cdot y$, wenn man das Differenzial von y durch y dividiret. Nun verhält sich aber $\frac{kdy}{y} : \frac{dy}{y} = k : 1$. Demnach findet man das Differenzial einer logarithmischen Größe in einem jeden andern Systeme, wenn man das Differenzial derselben Größe im natürlichen Systeme mit dem Model eines jeden andern Systems multiplicirt. Es ist daher nur zu zeigen nöthig, wie die Differenzialien der logarithmischen Größen im natürlichen Systeme gefunden werden.

§. 44.

§. 44.

Nach der im vorigen §. gegebenen Regel lassen sich die Differenziale aller möglichen logarithmischen Größen bestimmen. Folgende Beyspiele werden zur Erläuterung dieser Regel dienen.

Es sey $x = l.y$, so hat man $dx = \frac{dy}{y}$.

Es sey $x = l.y^n$. Man setze $y^n = z$, so wird $x = l.z$, folglich $dx = \frac{dz}{z}$. Nun ist aber $dz = ny^{n-1}dy$, also erhält man, die gehörigen Werthe substituirt, $dx = \frac{ny^{n-1}dy}{y^n} = \frac{ndy}{y}$. Dies nämliche Differenzial erhält man auch aus der Natur der Logarithmen; denn weil $l.y^n = nl.y$, und $d.l.y = \frac{dy}{y}$ ist: so hat man $d.l.y^n = \frac{ndy}{y}$.

Es sey $x = l.(a + y)$; man setze wiederum $z = a + y$, so wird $dz = dy$ und $l.z = x$, demnach $dx = \frac{dz}{z} = \frac{dy}{a + y}$.

Es sey $x = l.(b + y^4)$, so wird $dx = \frac{4y^3dy}{b + y^4}$.

Es sey $x = l.\frac{1}{\sqrt{(a - y^3)}} = -l.\sqrt{(a - y^3)} = -\frac{1}{2}l.\sqrt{(a - y^3)}$, mithin $dx = \frac{3y^2dy}{4(a - y^3)}$.

Es sey $x = l.\frac{y}{\sqrt[3]{(a^2 - y^2)}} = l.y - \frac{1}{3}l.$

(a²

$(a - y^2)$, mithin $dx = \frac{dy}{y} + \frac{2ydy}{3(a^2 - y^2)} = \frac{3a^2dy - 3y^2dy + 2y^2dy}{3y(a^2 - y^2)} = \frac{(3a^2 - y^2)dy}{3y(a - y^2)}$.

Es sey $x = l.(y + \sqrt{(a^2 + y^2)})$. Man setze $z = y + \sqrt{(a^2 + y^2)}$, so ist $x = l.z$ und $dx = \frac{dz}{z}$. Nun ist aber $dz = dy + \frac{ydy}{\sqrt{(a^2 + y^2)}} = \frac{dy\sqrt{(a^2 + y^2)} + ydy}{\sqrt{(a^2 + y^2)}} = \frac{(\sqrt{a^2 + y^2}) + y)dy}{\sqrt{(a^2 + y^2)}}$, also wird $dx = \frac{(y + \sqrt{(a^2 + y^2)}dy}{(y + \sqrt{(a^2 + y^2)})\,(\sqrt{(a^2 + y^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a^2 + y^2)}}$.

Es sey $x = \frac{1}{\sqrt{-a}}\, l.(y\sqrt{-a} + \sqrt{(a^2 - y^2)})$. Man setze $y\sqrt{-a} = z$, so wird $-ay^2 = z^2$, und $-y^2 = \frac{z^2}{a}$, mithin $a^2 - y^2 = a^2 + \frac{z^2}{a}$, und, wenn man gehörig substituiret, $x = \frac{1}{\sqrt{-a}}\, l.(z + \sqrt{(a^2 + \frac{z^2}{a})})$. Hieraus wird, wie aus dem vorigen Beyspiele erhellet, $dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(a^2 + \frac{z^2}{a})}}$. Nun ist aber $dz = dy\sqrt{-a}$, und daher $dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \cdot \frac{dy\sqrt{-a}}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$. Wenn daher gleich der gegebene Logarithme

rithme imaginaire Größen enthält, so wird doch sein Differenzial reell.

§. 45.

Wenn die Größe, deren Logarithme gegeben ist, ein Produkt aus mehreren Factoren seyn sollte, so weiß man aus der Lehre der Logarithmen, daß die Summe der Logarithmen der Factoren der Logarithme des Produktes ist. Daher wird es auch in solchen Fällen nicht schwierig seyn, ihre Differenziale nach der nämlichen Regel zu finden. Beyspiele hievon sind folgende:

Es sey $x = l.(yzu) = l.y + l.z + l.u$, mithin $dx = \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{du}{u}$.

Es sey $x = l.\frac{u}{y}.\frac{p}{z} = l.u + l.p - l.y - l.z$, und daher $dx = \frac{du}{u} + \frac{dp}{p} - \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$.

Es sey $x = l.y^n.z^m = nl.y + ml.z$, also $dx = \frac{ndy}{y} + \frac{mdz}{z}$.

Es sey $x = l.((1+y)(2+z)(3+u)) = l.(1+y) + l.(2+z) + l.(3+u)$, mithin wird $dy = \frac{dy}{1+y} + \frac{dz}{2+z} + \frac{du}{3+u}$.

Es sey $x = l.\sqrt{\left[\frac{a+y}{a-y}\right]} = \frac{1}{2}l.(a+y) - \frac{1}{2}l.(a-y)$, mithin wird $dx = \frac{\frac{1}{2}dy}{a+y} + \frac{\frac{1}{2}dy}{a-y}$

 =

$$= \frac{\frac{1}{2}ady - \frac{1}{2}ydy + \frac{1}{2}ady + \frac{1}{2}ydy}{a^2 - y^2} = \frac{ady}{a^2 - y^2}.$$

Es sey $x = \frac{1}{2}l \,.\, \frac{\sqrt{(a^2 + y^2)} + y}{\sqrt{(a^2 + y^2)} + y} = \frac{1}{2}l \,.$ $(\sqrt{(a^2+y^2)} + y) - \frac{1}{2}l.(\sqrt{(a^2+y^2)} - y)$; mithin ist $dx = \frac{\frac{1}{2}dy(y + \sqrt{(a^2+y)})}{(y + \sqrt{(a^2+y^2)})\,(\sqrt{(a^2+y^2)}} +$

$$\frac{\frac{1}{2}dy(-y+\sqrt{)a^2+y^2})}{(-y+\sqrt{(a^2+y^2)}\,(\sqrt{(a^2+y^2)}} = \frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{(a^2+y^2)}} + \frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{(a^2+y^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a^2+y^2)}}.$$

§. 46.

Da die ersten Differenziale der Logarithmen lauter algebraische Functionen werden, so lassen sich auch die höhern Differenziale derselben nach den oben gegebenen Regeln finden. Es sey z. B.

1. $y = x$, so hat man $dx = \frac{dy}{y}$; nimmt man nun dy als beständig an, so ergibt sich $d^2x = -\frac{dy^2}{y^2}$; $d^3x = \frac{2dy^3}{y^3}$; $d^4x = -\frac{6dy^4}{y^4}$ u. f.

Es sey ferner $x = l.(1 + y)$, so hat man $dx = \frac{dy}{1+y}$, und, dy als beständig betrachtet, $d^2x = -\frac{dy^2}{(1+y)^2}$; $d^3x = \frac{2dy^3}{(1+y)^3}$; $d^4x = -\frac{6dy^4}{(1+y)^4}$ u. s. f.

§. 47.

§. 47.

Wenn die Functionen aus logarithmischen und algebraischen Größen zusammengesetzet seyn, oder wenn sie aus lauter logarithmischen Größen bestehen sollten: so kann es durchaus keine Schwierigkeit mehr haben, die Differenziale dieser Functionen zu finden, wie folgende Beyspiele zeigen.

Es sey $x = y^2 . l . y - \frac{1}{2}y^2$. Man suche von jedem Theile das Differenzial, und man findet $d . y^2 . l . y = 2yl . ydy + y^2 . \frac{dy}{y} = 2yl . ydy + ydy$, und $d - \frac{1}{2}y^2 = - ydy$; also wird $dx = 2yl . ydy + ydy - ydy = 2yl . ydy$.

Es sey $x = (l . y)^3$. Man setze $l . y = z$; so hat man $(l . y)^3 = z^3 = x$, mithin $dx = 3z^2dz$, und $dz = \frac{dy}{y}$; also wird $dx = 3(l . y)^2\frac{dy}{y}$.

Es sey $x = l . y . l . z$, so wird $dx = l . z . \frac{dy}{y} + l . y . \frac{dz}{z}$.

Es sey $x = y . l . y$, so findet man $dx = dy . l . y . \frac{dy}{y} = l . ydy + dy$.

Es sey $x = y^2(l . y)^3$, so hat man $dx = 2ydy (l . y)^3 + 3y^2(l . y)^2 . \frac{dy}{y} = 2ydy(l . y)^3 + 3y(l . y)^2 . dy$.

Es sey $x = l^2 . y$. Man setze $l . y = z$, so wird

$l^2 y = l \cdot z = x$; also $dx = \frac{dz}{z}$; aber $dz = \frac{dy}{y}$, mithin wird $dx = \frac{dy}{yl \cdot y}$.

Es sey $x = l^3 \cdot y$. Man setze wiederum $l \cdot y = z$, so wird $l^3 y = l^2 z = x$, und daher $dx = \frac{dx}{zl \cdot z}$; nun ist $dz = \frac{dy}{y}$, mithin findet man $dx = \frac{dy}{yl \cdot yl^2 y}$.

Es sey $x = (l \cdot y)^n$, so hat man $dx = n(l \cdot y)^{n-1} \cdot \frac{dy}{y}$.

§. 48.

Aus der Bestimmung der Differenziale der logarithmischen Größen lassen sich auch die Differenziale der Exponentialgrößen finden. Es sey nämlich $y = a^x$, so weiß man, wenn man die Logarithmen nimmt, daß $l \cdot y = xl \cdot a$ seyn werde. Differenzliret man nun, so ergibt sich $\frac{dy}{y} = dxl \cdot a$, und hieraus findet man $dy = ydxl \cdot a = a^x dxl \cdot a$, weil $y = a^x$ ist, und dies ist das Differenzial von der Exponentialgröße a^x. Demnach findet man das Differenzial einer Exponentialgröße, wenn man die Exponentialgröße mit dem Differenziale des Exponenten und mit dem Logarithmen der beständigen Größe a multipliciret.

Wäre a die Basis eines Logarithmensystems, welche in dem natürlichen Logarithmensysteme gewöhnlich durch den Buchstaben e ausgedruckt wird: so hat man $l \cdot e =$

1,

1, mithin das Differenzial von $e^x = e^x dx$. In einem jeden andern Systeme müßte man das Differenzial der Exponentialgröße noch durch den Model dividiren. Setzt man nämlich den Model des Systems $= k$, so weiß man aus dem §. 42., daß sich die Differenziale einer logarithmischen Größe in zwey verschiedenen Systemen, wie die Model, verhalten; also verhält sich das Differenzial im natürlichen Systeme zum Differenzial in jedem andern wie 1 : k. Im natürlichen Systeme ist nun $\frac{dy}{y} = dxl.a$; also muß im andern Systeme $\frac{kdy}{y} = dxl.a$, mithin $dy = \frac{ydxl.a}{k} = \frac{a^x dxl.a}{k}$, und, wenn a die Basis ist, $dy = \frac{a^x dx}{k}$ seyn.

§. 49.

Auf eine völlig ähnliche Art kann man auch das Differenzial einer Exponentialgröße finden, wenn auch die Wurzel eine veränderliche Größe ist. Es sey $y = z^x$, so wird, wenn man die Logarithmen nimmt, $l.y = xl.z$, und daher erhält man $\frac{dy}{y} = dxl.z + x\frac{dz}{z}$; hieraus findet man $dy = ydxl.z + yx\frac{dz}{z}$, und, statt y den gleichen Werth z^x gesetzt, $dy = z^x dxl.z + z^x x\frac{dz}{z} = z^x dxl.z + z^{x-1}xdz$. Es besteht also dieses Differenzial aus zwey Theilen, wovon der erste $z^x dxl.z$ gefunden wird, wenn man die Exponentialgröße z^x so

differenziiret, als wenn z eine beständige Größe, der Exponent aber x allein veränderlich wäre; der andere Theil hingegen, wenn man in z^x den Exponenten x beständig und bloß z als veränderlich betrachtet. Auf diese Art lassen sich die Differenziale aller möglichen Exponentialgrößen finden. Folgende Beyspiele sind vorzüglich merkwürdig:

Es sey $y = x^x$, so hat man $dy = x^x dxl . x + x^x dx$.

Es sey $y = e^x x^n$, so ist $dy = e^x x^n dx + n e^x x^{n-1} dx = e^x dx(x^n + n x^{n-1})$:

Es sey $y = e^x(x - 1)$, so ist $dy = e^x dx(x - 1) + e^x dx = e^x x dx$.

Es sey $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$, so hat man $dy = e^x dx(x^2 - 2x + 2) + (2x - 2)e^x dx = e^x xx dx$.

Es sey $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$, so ist $dy = e^x dx(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + (3x^2 - 6x + 6)e^x dx = e^x xxx dx$.

§. 50.

Wenn vorausgesetzet wird, daß dx beständig ist: so lassen sich die höhern Differenziale der Exponentialgrößen nach denselben Regeln sehr leicht finden. Es sey $y = e^x$, so hat man $dy = e^x dx$, $d^2y = e^x dx^2$; $d^3y = e^x dx^3$, $d^4y = e^x dx^4$ u. s. f. Es sey ferner $y = x^x$, so hat man $dy = x^x dxl . x + x^x dx$; $d^2y = x^x(l . x)^2 dx^2 + x^x . dx^2 + x^x l . x dx^2 + x^x dx^2 + x^x l . x dx^2 = x^x dx^2((l . x)^2 + \frac{1}{x} + 2l . x + 1) = x^x dx^2(\frac{1}{x} + (1 + l . x)^2))$ u. s. f.

§. 51.

Außer den Exponentialgrößen gehören noch vorzüglich die trigonometrischen Größen zu den transcendenten Functionen. Um die Differenziale dieser Functionen zu finden, sind wieder ganz eigene Regeln nöthig. Wenn z irgend ein Kreisbogen ist, so weiß man, daß die trigonometrischen Größen, der Sinus, der Quersinus, die Tangente, die Sekante, der Cosinus, der Cosinus versus, die Cotangente und die Cosekante lauter Functionen des Kreisbogens z sind, und dieser Kreisbogen hinwiederum eine Function von allen trigonometrischen Größen. Da die trigonometrischen Differenziale in der Integralrechnung von großer Wichtigkeit sind, so sollen der Deutlichkeit wegen hier vor allen Dingen folgende Bezeichnungen festgesetzt werden. Es sey nämlich sin. z = x, so soll z = A . sin. x den Kreisbogen ausdrucken, zu welchem der Sinus x gehöret. Hieraus sind folgende Zeichen verständlich:

tang. z = x, also z = A . tang. x.
sin. v. z = x, — z = A . sin. v. x.
seca. z = x, — z = A . seca. x.
cos. z = x, — z = A . cos. x.
cos. v. z = x, — z = A . cos. v. x.
cota. z = x, — z = A . cota. x.
cosec. z = x, — z = A . cosec. x.

§. 52.

Es sey nun der Halbmesser eines Kreises = 1; AGB (Fig. 4.) ein Quadrant, und AG ein beliebiger Kreisbogen = z. Dieser Kreisbogen nehme um GF = Δz zu. Aus G lasse man GK senkrecht auf CA herab,

 und

und ziehe GD mit AC parallel. Auf den Endpunkt G des Halbmessers CG setze man GE senkrecht auf, und ziehe durch F die Linie FI mit GK parallel, welche die senkrechte GE in dem Punkte E und DG in H schneiden wird. Nun ist für den Bogen GA $=$ z die Linie GK $=$ HI der Sinus, CK $=$ DG der Cosinus, und HF der Zuwachs des Sinus GK, mithin GK $=$ HI $=$ sin. z, CK $=$ DG $=$ cos. z, und HF $= \Delta$ sin. z. Wegen der Aehnlichkeit der beyden Dreyecke EHG und GDC hat man DG : GC $=$ EH : GE, oder

$$\cos. z : 1 = EH : GE.$$

Je kleiner der Bogen GF angenommen wird, desto mehr nähert sich die gerade Linie GE dem Bogen GF, und HE der geraden Linie FH. In dem verschwindenden Zustande ist demnach

$$\cos. z : 1 = d . \sin. z : dz, \text{ und daher}$$
$$d . \sin. z = dz . \cos. z.$$

Man findet also das Differenzial des Sinus eines Kreisbogens, wenn man das Differenzial des Kreisbogens mit dem Cosinus desselben multipliciret.

§. 53.

Man setze sin. z. $=$ x, also z $=$ A . sin. x, und d . sin. z $=$ dx, und dz $=$ d . A . sin. x. Nach dem vorigen §. hat man d . sin. z $=$ dz . cos. z $=$ dx, also wird $dz = \frac{dx}{\cos. z.}$, oder, weil cos. z $=$

$\sqrt{(1 - \sin. z^2)} = \sqrt{(1 - x^2)}$ ist, $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$
$= d . A . \sin. x.$

Dem-

Demnach findet man das Differenzial eines Kreisbogens aus dem gegebenen Sinus desselben, wenn man das Differenzial dieses Sinus durch den Cosinus dividiret.

§. 54.

Wenn der Bogen (Fig. 5.) $AG = z$ um das unbestimmte Stück $GF = \Delta z$ zunimmt, so nimmt der Sinus GK um $HF = \Delta$ sin. z zu, der Cosinus KC aber um $KI = - \Delta$ cos. z ab. Nun hat man

$$GH : GE = DC : GG, \text{ oder}$$
$$- \Delta \cos. z : GE = \sin. z : 1.$$

Je kleiner der Bogen GF angenommen wird, desto mehr nähert sich die gerade Linie EG dem Bogen FG, und in dem unendlich kleinen Zustande ist

$$- d . \cos. z : dz = \sin. z : 1, \text{ also wird}$$
$$- d . \cos. z = dz . \sin. z \text{ oder}$$
$$d . \cos. z = - dz . \sin. z.$$

Daher findet man das Differenzial des Cosinus eines Kreisbogens, wenn man das Differenzial des Kreisbogens mit dem Sinus desselben multipliciret, und dieses Produkt negativ nimmt.

§. 55.

Es sey $\cos. z = x$, mithin $z = A . \cos. x$, und $d . \cos. z = dx$, und $dy = d . A . \sin. x$. Vermöge des vorigen §. ist $d . \cos. z = - dz . \sin. z = dx$, also wird $dz = d . A . \cos. x = - \frac{dx}{\sin. z}$, oder,

weil $\sin. z = \sqrt{(1 - \cos. z^2)} = \sqrt{(1 - x^2)}$ ist,

$$dz = - \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

Man findet also das Differenzial eines Kreisbogens durch den gegebenen Cosinus, wenn man das Differenzial des Cosinus durch den Sinus dividiret, und diesen Quotienten negativ nimmt.

§. 56.

Es sey irgend ein Kreisbogen $= z$, so gehört demselben die Tangente $\text{tang. } z = \frac{\sin. z}{\cos. z}$. Diesen Ausdruck differenziire man nach den gewöhnlichen Regeln, so findet man $d . \text{tang. } z =$

$$\frac{\cos. z . d . \sin. z - \sin. z . d . \cos. z}{\cos. z^2}.$$

Nun ist aber $d . \sin. z = dz . \cos. z$ und $d . \cos. z = - dz . \sin. z$, folglich wird, diese Werthe gehörig substituirt, $d . \text{tang. } z =$

$$\frac{\cos. z^2 . dz + \sin. z^2 . dz}{\cos. z^2} = \frac{dz(\cos. z^2 + \sin. z^2)}{\cos. z^2};$$

ferner ist $\cos. z^2 = 1 - \sin. z^2$, also erhält man

$$d . \text{tang } z = \frac{dz(1 - \sin.^2 + \sin. z^2)}{\cos. z^2} = \frac{dz}{\cos. z^2}.$$

Also findet man das Differenzial der Tangente eines Kreisbogens, wenn man das Differenzial des Kreisbogens durch das Quadrat des Cosinus desselben dividiret.

§. 57.

Man setze tang. $z = x$, also $z = A . \text{tang.}\ x$ und d . tang. $z = dx$ und $dz = d . A . \text{tang.}\ x$. Nach dem vorigen §. hat man

$$d . \text{tang.}\ z = dx = \frac{dz}{\cos. z^2}; \text{ mithin wird}$$

$$dz = dx . \cos. z^2.$$

Ferner ist $\text{tang.}\ z = x = \frac{\sin. z}{\cos. z} = \frac{\sqrt{(1 - \cos. z^2)}}{\cos. z}$, weil $\sin. z = \sqrt{(1 - \cos. z^2)}$ ist. Hieraus erhält man $x^2 = \frac{1 - \cos. z^2}{\cos. z^2}$, und $x^2 . \cos. z^2 = 1 - \cos. z^2$, oder $(x^2 + 1) \cos. z^2 = 1$, mithin $\cos. z^2 = \frac{1}{x^2 + 1}$. Substituiret man nun diesen Werth statt $\cos. z^2$ in den Ausdruck $dx . \cos. z^2$, so ergibt sich $dz = d . A . \text{tang.}\ x = \frac{dx}{1 + x^2}$.

Man findet daher das Differenzial eines Kreisbogens durch die gegebene Tangente, wenn man das Differenzial der Tangente durch das Quadrat der Sekante dividiret. Denn wenn tang. $z = x$ ist, so ist secan. $z = \sqrt{(1 + x^2)}$, und secan. $z^2 = 1 + x^2$.

§. 58.

Es sey irgend ein Kreisbogen $= z$, so ist cotan. $z = \frac{\cos. z}{\sin. z}$, mithin nach den gewöhnlichen Regeln differenziiret, d . cotan. $z =$

sin.

$$\frac{\sin. z . d . \cos. z - \cos. z . d . \sin. z.}{\sin. z^2}.$$

Nun ist aber d . cos. $z = -$ dz . sin. z, und d . sin z $=$ dz . cos. z, also wird d . cot. z $=$

$$\frac{-\sin. z^2 dz - \cos. z^2 dz}{\sin. z^2} = -\frac{dz(\sin. z^2 + \cos. z^2)}{\sin. z^2};$$

aber sin. $z^2 = 1 - \cos. z^2$, folglich d . cot. z $=$

$$\frac{-dz(1 - \cos. z^2 + \cos. z^2)}{\sin. z^2} = -\frac{dz}{\sin. z^2}.$$

Folglich findet man das Differenzial der Contangente eines Kreisbogens, wenn man das Differenzial des Kreisbogens durch das Quadrat des Sinus dividiret, und diesen Quotienten negativ nimmt.

§. 59.

Man nehme cota. $z = x$, folglich $z =$ A . cota. x, und d . cota. z $=$ dx, dz $=$ d . A . cota. x. Vermöge des vorigen §. ist d . cota z $=$ dx $= -\frac{dz}{\sin. z^2}$; Hieraus erhält man also dz $= -$ dx . sin. z^2. Nun ist aber auch cota. z $= \frac{\cos. z}{\sin. z} =$

$\frac{\sqrt{(1 - \sin. z^2)}}{\sin. z.} = x$, also sin. z . x $= \sqrt{(1 - \sin. z^2)}$ oder sin. $z^2 . x^2 = (1 - \sin. z^2)$, und $(x^2 + 1)$ sin. $z^2 = 1$, mithin sin. $z^2 = \frac{x^2 + 1}{dx}$.

Setzt man diesen Werth statt sin. z^2 in den Ausdruck

$- dx \cdot \sin. z^2$, so ergibt sich $dz = d \cdot A \cdot \text{cota.}\, x = - \frac{dx}{x^2 + 1}$.

Man findet also das Differenzial eines Kreisbogens durch die gegebene Cotangente, wenn man das Differenzial der Contangente durch das Quadrat der Cosekante dividiret, und diesen Quotienten negativ nimmt. Denn wenn $\text{cotan.}\, z = x$, so ist $\text{cosec.}\, z = \sqrt{(x^2 + 1)}$ und $\text{cosec.}\, z^2 = x^2 + 1$.

§. 60.

Es drucke z irgend einen Kreisbogen aus, so ist $\sec. z = \frac{1}{\cos. z}$, mithin $d \cdot \sec. z = - \frac{d \cdot \cos. z}{\cos. z^2}$; aber $d \cdot \cos. z = - dz \cdot \sin. z$, also $- d \cdot \cos. z = dz \cdot \sin. z$, und es wird $d \cdot \sec. z = \frac{dz \cdot \sin. z}{\cos. z^2}$.

Demnach findet man das Differenzial einer Sekante eines Kreisbogens, wenn man das Differenzial des Kreisbogens mit dem Sinus desselben multiplicirет, und dieses Produkt durch das Quadrat des Cosinus dividiret.

§. 61.

Man setze $\text{secan.}\, z = x$, mithin $z = A \cdot \text{secan.}\, x$, und $d \cdot \text{seca.}\, z = dx$, $dz = d \cdot A \cdot \text{seca.}\, x$. Nach dem vorigen §. ist $d \cdot \text{seca.}\, z = \frac{dz \cdot \sin. z}{\cos. z^2} = dx$, also wird $dz = \frac{dx \cdot \cos z^2}{\sin. z} = d \cdot A \cdot \text{seca.}\, x$.

Fer-

Ferner ist $\sec. z = \frac{1}{\cos. z} = x$, und daher $1 = x . \cos. z$, oder $\frac{1}{x} = \cos. z$ und $\frac{1}{x^2} = \cos. z^2$. Weiter ist auch $\sec. z = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sin. z^2)}}$, mithin $\sec. z = x = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sin. z^2)}}$, und $x^2 = \frac{1}{1 - \sin. z^2}$, oder $x^2 - x^2 \sin. z^2 = 1$, oder $x^2 \sin. z^2 = x^2 - 1$, und $\sin. z = \frac{\sqrt{(x^2 - 1)}}{x}$. Setzt man nun diese für $\cos. z^2$ und $\sin. z$ gefundenen gleichen Werthe in den Ausdruck $\frac{dx . \cos. z^2}{\sin. z}$, so ergibt sich $dz = \frac{dx}{x^2} : \frac{\sqrt{(x^2 - 1)}}{x} = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}$.

Man findet also das Differenzial eines Kreisbogens durch die gegebene Sekante, wenn man das Differenzial der Sekante durch das Produkt der Sekante mit der Tangente dividiret. Denn wenn $\sec. z = x$ ist, so ist $\tang. z = \sqrt{(x^2 - 1)}$.

§. 62.

Es sey z irgend ein Kreisbogen, so hat man $\text{cosec.}\ z = \frac{1}{\sin. z}$, und daher $d . \cos. z = \frac{- d . \sin. z}{\sin. z^2}$. Nun ist aber $d . \sin. z = dz . \cos. z$, nnd $- d . \sin. z = - dz \cos. z$, also erhält man $d . \cos. z = - \frac{dz . \cos. z}{\sin. z^2}$.

Man

Man erhält also das Differenzial der Cosekante eines Kreisbogens, wenn man das Differenzial des Kreisbogens mit dem Cosinus desselben multiplicirt, dieses Produkt durch das Quadrat des Sinus dividiret, und diesen Quotienten negativ nimmt.

§. 63.

Man nehme $\text{cosc.}\ z = x$, mithin $z = A.\ \text{cosc}\ x$, und $d.\ \text{cosc.}\ z = dx$, $dz = d.\ A.\ \text{cosc.}\ x$. Nach dem vorigen §. hat man $d.\ \text{cosc.}\ z = -\dfrac{dz.\ \cos.\ z}{\sin.\ z^2} = dx$, also erhält man daraus $dz = d.\ A.\ \text{cosc.}\ x = -\dfrac{dz.\ \sin\ z^2}{\cos.\ z}$.

Aus $\text{cosc.}\ z = \dfrac{1}{\sin.\ z} = x$ erhält man $1 = x.\ \sin.\ z$, und $\sin.\ z = \dfrac{1}{x}$, mithin $\sin.\ z^2 = \dfrac{1}{x^2}$. Ferner ist auch $\text{cosc.}\ z = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - \cos.\ z^2)}} = x$, also wird $x^2(1 - \cos.\ z^2) = 1$, oder $x^2.\ \cos.\ z^2 = x^2 - 1$, und $\cos.\ z^2 = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$, und $\cos.\ z = \dfrac{\sqrt{(x^2 - 1)}}{x}$. Substituirt man für $\sin.\ z^2$ und $\cos.\ z$ die eben gefundenen gleichen Werthe: so ergibt sich $dz = -\dfrac{dx}{x^2} : \dfrac{\sqrt{(x^2 - 1)}}{x} = -\dfrac{dx}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}$.

Man findet also das Differenzial des

Kreisbogens, wenn man das Differenzial der Cosekante durch das Produkt der Cosekante mit der Cotangente dieses Bogens dividiret, und diesen Quotienten negativ nimmt. Denn ist $\text{cosc.}\, z = x$, so ist $\cot. z = \sqrt{(x^2 - 1)}$.

§. 64.

Es sey irgend ein Kreisbogen $= z$, so hat man $\text{sin. v.}\, z = 1 - \cos. z$, mithin $d . \text{sin. v.}\, z = - d . \cos. z$; es ist aber $d . \cos. z = - dz . \sin. z$, also wird $d . \text{sin. v.}\, z = dz . \sin. z$.

Man findet also das Differenzial des Quersinus eines Kreisbogens, wenn man das Differenzial dieses Bogens mit dem Sinus desselben multipliciret.

§. 65.

Es sey $\text{sin. v.}\, z = x$, also $z = A . \text{sin. v.}\, x$, und $d . \text{sin. v.}\, z = dx$, $dz = d . A . \text{sin. v.}\, x$. Nach dem vorigen §. hat man $d . \text{sin. v.}\, z = dz \sin. z = dx$, also wird $dz = \frac{dx}{\sin. z}$. Ferner ist $\text{sin. v.}\, z = 1 - \cos. z = 1 - \sqrt{(1 - \sin. z^2)} = x$, und $1 - x = \sqrt{(1 - \sin. z^2)}$, folglich $1 - 2x + x^2 = 1 - \sin. z^2$, oder $2x - x^2 = \sin. z^2$, und $\sin. z = \sqrt{(2x - x^2)}$. Substituirt man diesen Werth, so findet man $dz = d . A . \text{sin. v.}\, x = \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}$.

Also findet man das Differenzial eines Kreisbogens, wenn man das Differenzial des

des Quersinus durch den Sinus des Bogens dividiret.

§. 66.

Man bezeichne mit z irgend einen Kreisbogen, so hat man cosin v. $z = 1 - \sin. z$, also $d . \cos. v. z = - d . \sin. z$. Es ist aber $d . \sin. z = dz . \cos. z$, mithin wird $d . \cos. v. z = - dz . \cos. z$.

Demnach findet man das Differenzial des Cosinus versus eines Kreisbogens, wenn man das Differenzial des Kreisbogens mit dem Cosinus desselben multiplicieret, und dieses Produkt negativ nimmt.

§. 67.

Man setze $\cos. v. z = x$, mithin $z = A . \cos. v. x$, und $d . \cos. v. z = dx$, und $dz = d . A . \cos. v. x$. Vermöge des vorigen §. hat man $d . \cos. v. z = - dz . \cos. z = dx$, also wird $dz = - \frac{dx}{\cos. z}$.

Aus $\cos. v. z = x = 1 - \sin. z$ erhält man $x = 1 - \sqrt{(1 - \cos. z^2)}$, oder $1 - x = \sqrt{(1 - \cos. z^2)}$, mithin $1 - 2x + x^2 = 1 - \cos. z^2$, und $2x - x^2 = \cos. z^2$, und $\cos. z = \sqrt{(2x - x^2)}$. Substituirt man diesen Werth, so ergibt sich $dz = d . A . \cos. v. x = - \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}$.

Man findet also das Differenzial eines Bogens, wenn man das Differenzial des Cosinus versus durch den Sinus des Bogens dividiret, und diesen Quotienten negativ nimmt.

§. 68.

Da die Differenziale der trigonometrischen Functionen besonders wichtig sind, so folgen sie hier, um sie mit einem Blicke zu übersehen, alle auf einander. Aus dem bisher erwiesenen hat man also:

1. $d . \sin. z = dz . \cos. z$
2. $d . \cos. z = - dz . \sin. z$
3. $d . \text{tang}. z = \frac{dz}{\cos. z^2}$
4. $d . \cot. z = \frac{- dz}{\sin. z^2}$
5. $d . \sec. z = \frac{dz . \sin. z}{\cos. z^2}$
6. $d . \text{cosc}. z = - \frac{dz . \cos. z}{\sin. z^2}$
7. $d . \sin. v. z = dz . \sin. z$
8. $d . \cos. v. z = - dz . \cos. z$
9. $d . A . \sin. x = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$
10. $d . A . \cos. x = - \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$
11. $d . A . \text{tang}. x = \frac{dx}{x^2 + 1}$
12. $d . A . \cot. x = - \frac{dx}{x^2 + 1}$
13. $d . A . \sec. x = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2 + 1)}}$
14. $d . A . \text{cosc}. x = - \frac{dx}{x\sqrt{(x^2 + 1)}}$

15.

$$15.\ d\ .\ A\ .\ \text{sin. v.}\ x = \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}$$

$$16.\ d\ .\ A\ .\ \text{cos. v.}\ x = -\frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}.$$

§. 69.

Wenn man diese Formeln sich zu eigen gemacht hat, so fällt es alsdenn gar nicht mehr schwer, die Differenziale solcher Functionen zu finden, in welchen trigonometrische Größen vorkommen. Zur Erläuterung mögen folgende Beyspiele dienen:

1. Es sey $y = \sqrt{\frac{1 + \cos. x}{2}}$, so findet man $dy = \frac{-dx\ .\ \sin.\ x}{2\sqrt{2(1 + \cos.\ x)}}$. Es ist aber nach trigonometrischen Sätzen $2\ .\ \cos.\ \frac{1}{2}x = 2\sqrt{\frac{1 + \cos.\ x}{2}} = \sqrt{4\ .\ \frac{1 + \cos.\ x}{2}} = \sqrt{2(1 + \cos.\ x)}$; also wird $dy = \frac{-dx\ \sin.\ x}{2\ .\ 2\ \cos.\ \frac{1}{2}x}$; ferner ist $\sin.\ x = 2\ \sin.\ \frac{1}{2}x\ .\ \cos.\ \frac{1}{2}x$, und daraus ergibt sich $dy = \frac{-dx\ .\ 2\ .\ \sin.\ \frac{1}{2}x\ .\ \cos.\ \frac{1}{2}x}{2\ .\ 2\ \cos.\ \frac{1}{2}x}$ $= \frac{-dx\ .\ \sin.\ \frac{1}{2}x}{2} = -\frac{1}{2}dx\ .\ \sin\ \frac{1}{2}x.$

2. Es sey $y = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang.}\ x^2)}}$, so wird $dy = \frac{-dx\ \text{tang.}\ x}{\cos.\ x^2 \sqrt{(1 + \text{tang.}\ x^2)}}$.

3. Es sey $y = 2\ \sin.\ x$, so wird $dy = 2\ \sin.\ xd$

. cos.

$. \cos. x + 2 \cos. xd . \sin. x$; es ist aber $d . \cos. x = - dx \sin x$ und $d \sin. x = dx . \cos. x$, also wird $dy = 2dx . \cos. x^2 - 2dx \sin. x^2 = 2dx(\cos. x^2 - \sin. x^2) = 2dx \cos. 2x$.

4. Es sey $y = \cos. l . \frac{1}{x}$. Man setze $l . \frac{1}{x} = z$, so wird $y = \cos. z$, und daher $dy = - dz . \sin. z$; nun ist aber $dz = dl . \frac{1}{x} = dl . (1 - x) = - dl . x = - \frac{dx}{x}$, und $\sin. z = \sin. l . \frac{1}{x}$; folglich wird $dy = + \frac{dx}{x} \sin. l . \frac{1}{x}$.

5. Es sey $y = A . \sin. 2x\sqrt{(1 - x^2)}$. Man setze $2x\sqrt{(1 - x^2)} = z$, so wird $y = A . \sin. z$, und man hat $dy = \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}}$. Nun ist aber $dz = 2dx\sqrt{(1 - x^2)} - \frac{2x^2dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \frac{2(1 - 2x^2)dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$, und $z^2 = 4x^2(1 - x^2) = 4x^2 - 4x^4$, also $1 - z^2 = 1 - 4x^2 + 4x^4$, und $\sqrt{(1 - z^2)} = 1 - 2x^2$. Substituirt man diese Werthe, so erhält man $dy = \frac{2(1 - 2x^2)dx}{\sqrt{(1 - x^2)}\,(1 - 2x^2)} = \frac{2dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$.

§. 70.

Die bisherigen Vorschriften sind auch hinreichend, die höhern Differenziale der trigonometrischen Größen zu finden. Es sey z. B. $y = \sin. x$ und $z = \cos. x$, so erge-

ergeben sich die höhern Differenziale, wenn man dx als beständig annimmt, auf diese Art:

$y = \sin. x$	$z = \cos. x$
$dy = dx \cos. x$	$dz = - dx . \sin. x$
$d^2y = - dx^2 \sin. x$	$d^2z = - dx^2 . \cos. x$
$d^3y = - dx^3 \cos. x$	$d^3z = dx^3 \sin. x$
$d^4y = dx^4 \sin. x$	$d^4z = dx^4 \cos. x$
$d^5y = dx^5 \cos. x$	$d^5z = - dx^5 . \sin. x$
$d^6y = - dx^6 \sin. x$	$d^6z = - dx^6 . \cos. x$
u. s. f.	u. s. f.

Fünfter Abschnitt.

Erste Gründe der Integralrechnung.

§. 71.

Eine jede Function wird das Integral ihres Differenzials genennt. Und eine gegebene Differenzialfunction integriren, heißt ihr Integral suchen, d. h diejenige Function finden, aus welcher die Differenzialfunction entstanden ist. Es beschäftiget sich also die Integralrechnung mit denjenigen Regeln, nach welchen das Integral auf dem kürzesten Wege zu finden ist. Es sey z. B. $y = ax$, so ist $dy = adx$, und das Integral von $adx = ax$. Um das Integral eines Differenzials anzuzeigen, gebrauchet man den Buchstaben $\int$, welcher demselben vorangesetzet wird. So ist also $\int . adx = ax$.

§. 72.

§. 72.

Das Differenzial eines Produktes einer beständigen Größe in einer veränderlichen ist ein Produkt der beständigen Größe in die veränderliche. Daher findet man das Integral eines solchen Differenzials, wenn man bloß das Differenzialzeichen wegläßt; mithin heben sich hier die Zeichen $\int$ und d gegen einander auf. So ist z. B. $\int . \frac{dx}{b} = \frac{x}{b}$; $\int . 2dx = 2x$; $\int . \frac{3}{4}dx = \frac{3}{4}x$ u. s. f. Ferner entsteht das Differenzial eines Aggregats oder eines Unterschiedes von mehreren veränderlichen Größen, wenn man von einer jeden veränderlichen Größe ihr Differenzial nimmt mit Beybehaltung der Zeichen. Daher findet man auch umgekehrt das Integral von einer solchen Differenzialfunction, wenn man von jedem einzelnen Differenziale das Integral mit Beybehaltung der Zeichen nimmt. So ist z. B. $\int . (dx + dy - dz + 2dq) = x + y - z + 2q$. Es hat also gar keine Schwierigkeit, von Differenzialfunctionen dieser Art das Integral zu suchen.

§. 73.

Aus der Differenzialrechnung erhellet, daß die Summe und der Unterschied von beständigen und veränderlichen Größen einerley Differenzial mit den veränderlichen Größen hat. Hieraus folgt, daß das Integral eines solchen Differenzials nicht vollständig gefunden wird. So ist z. B. das Differenzial von $2x + \frac{3}{4}z + a = 2dx + \frac{3}{4}dz$. Von $2dx + \frac{3}{4}dz$ findet man aber das Integral $2x + \frac{3}{4}z$, also fehlt die beständige Größe a. Damit also das Integral aus einer gegebenen Differenzialfunc-

tion

tion vollständig gefunden werde, setzt man zu jedem Integrale eine beständige Größe const. hinzu, welche jederzeit aus den Bedingungen einer Aufgabe bestimmt werden muß.

§. 74.

Bey Erfindung der Integrale von algebraischen Differenzialfunctionen einer einzigen veränderlichen Größe ist besonders die Bestimmung des Integrals von folgender allgemeinen Form $x^n dx$ merkwürdig. Man findet das Integral derselben durch folgende sehr leichte Regel: Man lasse dx weg, addire zu dem Exponenten 1, dividire die dadurch entstandene Potenz durch den um die Einheit vermehrten Exponenten, und setze const. hinzu. Demnach hat man $\int . x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{const.}$ Man suche von $\frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{const.}$ das Differenzial, so findet man $d . \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{const.}\right) = \frac{(n+1)\, x^n dx}{n+1} =$ $x^n dx$; mithin ist auch $\frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{const.}$ diejenige Function, aus welcher das Differenzial $x^n dx$ entstanden ist, d. h. das Integral von $x^n dx$. Diese Regel bleibt, es mag n eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl seyn. So ist also

$$\int . x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + \text{const.}$$

$$\int . x^{\frac{r}{m}} dx = \frac{x^{\frac{r}{m}+1}}{\frac{r}{m}+1} + \text{const.}$$

$$\int . x^{-\frac{r}{m}} dx = \frac{x^{-\frac{r}{m}+1}}{-\frac{r}{m}+1} + \text{const.}$$

Zur Erläuterung mögen folgende Beyspiele dienen:

$$\int . 3x^2dx = \frac{3x^3}{3} + \text{const.} = x^3 + \text{const.}$$

$$\int . \tfrac{3}{4}x^3dx = \tfrac{3}{4} . \frac{x^4}{4} + \text{const.} = \tfrac{3}{16}x^4 + \text{const.}$$

$$\int . \frac{dx}{2\sqrt{x}} = s . \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} : \tfrac{1}{2} = \sqrt{x} + \text{const.}$$

$$\int . \tfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}dx = s . \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{x}dx = \tfrac{1}{3} . x^{\frac{4}{3}} : \tfrac{4}{3} = \tfrac{1}{4}x\sqrt[3]{x} + \text{cst.}$$

$$\int . \frac{4dx}{x^2} = 4x^{-2}dx = -4x^{-1} = -\frac{4}{x} + \text{const.}$$

$$\int . \tfrac{3}{4} . \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = s . \tfrac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}}dx = \tfrac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} : \tfrac{1}{4} = 3\sqrt[4]{x} + \text{const.}$$

§. 75.

Eben so wenige Schwierigkeiten hat es, das Integral zu bestimmen, wenn die gegebene Differenzialfunction folgende allgemeine Form hat: $ax^m dx + bx^n dx + cx^p dx + ex^q dx$ u. s. Man findet nämlich das Integral, wenn man von jedem Gliede das Integral nimmt, und es ist dabey ganz gleichgültig, die Exponenten von x mögen ganze positive oder negative, oder gebrochene positive oder negative Zahlen seyn. Es ist also das Integral

tegral $\frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} + \frac{cx^{p+1}}{p+1} + \frac{ex^{q+1}}{q+1}$ + u. f. + const. Folgende Beyspiele können zur Erläuterung dienen:

Es sey $dy = x^3dx - \frac{3}{4}x^2dx$, so hat man $\int . dy = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}x^3 + const.$

Es sey $dy = \frac{3dx}{x^3} + 2xdx + \frac{1}{3} . \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$, so hat man $\int . dy = - \frac{3}{2x^2} + x^2 + \sqrt[3]{x} + const.$

Es sey $dy = 8x^3dx - 15x^4dx + 18x^5dx - 7x^6dx$, so erhält man $\int . dy = 2x^4 - 3x^5 + 3x^6 - x^7 + const.$

Es sey $dy = \frac{4dx}{x^3} + 6x\sqrt{x}, dy - \frac{dx}{5x^2\sqrt[3]{x}} + \frac{4dx}{3x\sqrt{x}}$, so ist $\int . dy = - \frac{2}{x^2} + \frac{12}{5} . x^2\sqrt{x} + \frac{3}{20x\sqrt{x}} - \frac{8}{3\sqrt{x}} + const.$

§. 76.

Wenn der Exponent n in der Differenzialfunction $x^n dx$ die negative Einheit ist, so läßt sich alsdenn das Integral von $x^{-1} = \frac{dx}{x}$ nach der gegebenen Regel nicht mehr finden, sondern man muß nunmehr zu den Logarithmen seine Zuflucht nehmen. Man hat nämlich $\int . \frac{dx}{x} = l . x + const.$, und dies wäre das Integral im

natürlichen Logarithmensysteme; in jedem andern Systeme müßte $l.x$ noch mit dem Model des Systems multipliciret werden. Der vorzügliche Kunstgriff, gegebene logarithmische Differenzialfunctionen zu integriren, beruht darauf, die Function auf diese allgemeine Form $\frac{dz}{z}$ zu bringen, da alsdenn jederzeit seyn wird $\int.\frac{dz}{z} = l.z + \text{const.}$ Sollte die allgemeine Form $\frac{dz}{z}$ noch mit einer beständigen Größe multipliciret oder dividiret seyn, so muß auch ihr Integral damit multipliciret oder dividiret werden. Die größte Deutlichkeit des hiebey Statt findenden Verfahrens werden Beyspiele geben, und es soll mit den leichtesten der Anfang gemacht werden.

Es sey $dy = \frac{ndx}{x}$, so hat man $\int.\frac{ndx}{x} = nl.x$ const. $= l.x^n + \text{const.}$

Es sey $dy = \frac{dx}{1+x}$. Man setze also $1 + x = z$, so hat man $dx = dz$, und daher $\frac{dx}{1+x} = \frac{dz}{z}$. Hieraus findet man $\int.\frac{dz}{z} = l.z$, und daher $\int.\frac{dx}{1+x} = l.(1+x) + \text{const.}$

Es sey $dy = \frac{3x^2dx}{a+x^3}$. Man setze wiederum $a + x^3 = z$, so hat man $3x^2dx = dz$, und die gegebene Formel verwandelt sich in diese: $\frac{dz}{z}$; daher ist das Integral

$\int.$

$$\int . \frac{dz}{z} = l . z = l . (a + x^3) + \text{const.}$$

Es sey $dy = \frac{xdx}{a - x^2}$. Man nehme $a - x^2 = z$, so hat man $2xdx = - dz$, und $xdx = - \frac{1}{2}dz$; also verwandelt sich die gegebene Formel in $- \frac{dz}{2z}$, und man findet das Integral $- \int . \frac{dz}{2z} = - \frac{1}{2}l . z = - \frac{1}{2}l . (a - x^2) = - l . \sqrt{(a - x^2)} = l . \frac{1}{\sqrt{(a - x^2)}}$.

Es sey $dy = - \frac{(1 + 2x)dx}{b + x + x^2}$. Man nehme abermals $b + x + x^2 = z$, so findet man $(1 + 2x)dx = dz$, und es verwandelt sich die Formel in $- \frac{dz}{z}$, also wird das Integral $- \int . \frac{dz}{z} = - l . z = - l . (b + x + x^2) + \text{const.} = l . \frac{1}{b + x + x^2} + \text{const.}$

§. 77.

Sollte die gegebene Differenzialfunction aus mehreren Theilen zusammengesetzet seyn, welche insgesammt auf die allgemeine Form $\frac{dz}{z}$ gebracht werden können: so lassen sich die Integrale derselben ebenfalls sehr leicht finden.

Es sey $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$ gegeben, so hat man das

Inte-

Integral $\int . \frac{dx}{x} + \int . \frac{dy}{y} + \int . \frac{dz}{z} = l . x + l . y + l . z + \text{const.} = l . (xyz) + \text{const.}$

Es sey $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} - \frac{dp}{p}$ gegeben, so findet man das Integral $\int . \frac{dx}{x} - \int . \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} - \int . \frac{dp}{p} = l . x - l . y + l . z - l . p + \text{const.} = l . \frac{xz}{yp} + \text{const.}$

Es ist $\frac{ndx}{x} + \frac{mdy}{y}$ gegeben, so wird das Integral $\int . \frac{ndx}{x} + \int . \frac{mdy}{y} = nl . x + ml . y = l . x^n + l . y^m + \text{const.} = l . (x^n . y^m) + \text{const.}$

Es ist $\frac{2xdx}{a + x^2} - \frac{3y^2dy}{2 - y^3}$ gegeben; man setze $a + x^2 = z$, und $2 - y^3 = p$, so hat man $2xdx = dz$, und $3y^2dy = - dp$; also verwandelt sich die gegebene Function in diese: $\frac{dz}{z} + \frac{dp}{p}$, und man findet das Integral $\int . \frac{dz}{z} + \int . \frac{dp}{p} = l . z + l . p + \text{const.} = l . (a + x^2) + l . (2 - y^3) + \text{const.} = l . (a + x^2)(2 - y^3) + \text{const.}$

§. 78.

Wenn nach der bisherigen Behandlung die gegebene Differenzialfunction nicht auf die allgemeine Form $\frac{dz}{z}$ gebracht

gebracht werden könnte, so suche man die Function in eine Summe partieller Brüche aufzulösen. Ist dies möglich, so erhalten gewöhnlich die Brüche die allgemeine Form $\frac{dz}{z}$, und es läßt sich alsdenn das Integral finden. Folgende Beyspiele werden die Kunstgriffe am besten zeigen.

1. Die gegebene Differenzialfunction sey $\frac{(3a^2-x^2)dx}{3x(a^2-x^2)}$ Da der Nenner des Bruchs wenigstens zwey Factoren hat, so verwandle man den Bruch in zwey partielle Brüche. Man setze nämlich $\frac{3a^2-x^2}{3x(a^2-x^2)} = \frac{A}{3x} + \frac{Bx}{a^2-x^2}$; nun bringe man alles auf einerley Nenner, und schaffe die Nenner weg; man findet $3a^2 - x^2 = A(a^2 - x^2) + Bx - 3x$ oder $3a^2 - x^2 = a^2A - Ax^2 + 3Bx^2$; folglich erhält man $A = 3$, und $-3 + 3B = -1$ oder $3B = 2$, und $B = \frac{2}{3}$. Demnach ergibt sich $\frac{3a^2-x^2}{3x(a^2-x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(a^2-x^2)}$, und $\frac{(3a^2-x^2)dx}{3x(a^2-x^2)} = \frac{dx}{x} + \frac{2xdx}{3(a^2-x^2)}$. Setzt man nun $a^2 - x^2 = z$, so hat man $2xdx = -dz$, und es verwandelt sich die gegebene Differenzialfunction in diese: $\frac{dx}{x} - \frac{dz}{3z}$; also wird das Integral $\int . \frac{dx}{x} - \int . \frac{dz}{3z} = l.x - \frac{1}{3}l.z = l.x - l.\sqrt[3]{z} = l.x - l.\sqrt[3]{(a^2-x^2)} = l.\frac{x}{\sqrt[3]{(a^2-x^2)}} + \text{const.}$

2. Es ist die Differenzialfunction $\frac{adx}{a^2 - x^2}$ gegeben. Man hat aber $\frac{a}{a^2 - x^2} = \frac{a}{(a+x)(a-x)}$ $= \frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x}$, und daher

$a = A(a - x) + B(a + x)$ oder

$a = aA - Ax$
$ aB + Bx$; also findet man

$A + B = 1$ und $- A + B = 0$; hieraus ergibt sich $2A = 1$ und $A = \frac{1}{2}$, auch $B = \frac{1}{2}$; daher wird $\frac{a}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2(a+x)} + \frac{1}{2(a-x)}$, und $\frac{adx}{a^2 - x^2}$ $= \frac{dx}{2(a+x)} + \frac{dx}{2(a-x)}$; also ist das Integral $\int.$ $\frac{adx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2}l.(a+x) + \frac{1}{2}l.(a-x) + \text{const.}$ $= l.\sqrt{(a+x)} - l.\sqrt{(a-x)} = l.\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(a-x)}}$ $+ \text{const.}$

§. 79.

Oft findet der Fall Statt, daß zwar eine gegebene Differenzialfunction sich in eine Summe partieller Brüche zerlegen läßt, allein nicht jeder einzelne Bruch hat die Form $\frac{dz}{z}$, sondern vielmehr eine algebraische Gestalt, und kann daher auch nicht durch Logarithmen integriret werden, sondern sein Integral ist vielmehr algebraisch, und wird nach der im §. 74. gegebenen Regel gefunden.

Fol-

Folgende Paar Beyspiele werden hievon eine große Deutlichkeit geben.

1. Es sey die Differenzialfunction $\frac{(2+3x-x^2)dx}{x^3-x^2-2x-12}$ gegeben. Die partiellen Brüche, in welche sich die Function $\frac{2+3x-x^2}{x^3-x^2-2x-12}$ zerlegen läßt, sind diese beyden: $\frac{8}{(x+2)^2} - \frac{32}{x+2}$; mithin die Differenziale $\frac{8dx}{(x+2)^2} - \frac{32dx}{x+2}$. Nun setze man $x+2=z$, so hat man $dx = dz$, also verwandeln sich jene Brüche in diese: $\frac{8dz}{z^2} - \frac{32dz}{z} = 8z^{-2}dz - \frac{32dz}{z}$, und es wird daher das Integral $\int . \frac{(2+3x-x^2)dx}{x^3-x^2-2x-12} = -\frac{8}{z} - 32 . l . z + \text{const.} = -\frac{x+2}{8} - 32l . (x+2) + \text{const.}$

2. Es sey die Differenzialfunction $\frac{(1+6x^2)dx}{(x+2)^3x}$ gegeben. Man findet $\frac{1+6x^2}{(x+2)^3x} = -\frac{25}{2(x+2)^3} + \frac{23}{4(x+2)^2} - \frac{1}{2(x+2)}$, mithin $\frac{(1+6x^2)dx}{(x+2)^3x} = \frac{-25dx}{2(x+2)^3} + \frac{23dx}{4(x+2)^2} - \frac{dx}{2(x+2)}$, und $\int . \frac{(1+6x^2)dx}{(x+2)^3x} = \frac{25}{4(x+2)^2} - \frac{23}{4(x+2)} + l . \frac{1}{\sqrt{(x+2)}} + \text{const.}$

§. 80.

Wenn die gegebene Differenzialfunction weder auf die allgemeine Form $\frac{dz}{z}$, noch in eine Summe partieller Brüche aufgelöset werden kann: so hat man oft kein anderes Mittel, als die Function in eine unendliche Reihe zu verwandeln, und jedes Glied zu integriren. Folgendes Beyspiel wird hinreichende Deutlichkeit geben.

$\frac{(1 + 2x)dx}{2 + 3x + x^2}$ ist gegeben; man sucht das Integral.

Man setze $\frac{1 + 2x}{2 + 3x + x^2} = A + Bx + Cx^2\ Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 +$ u. f., so erhält man $1 + 2x =$

$$\begin{aligned} &2A + 2Bx + 2Cx^2 + 2Dx^3 + 2Ex^4 + 2Fx^5 \text{ u. f.} \\ &\quad + Ax + 3Bx^2 + 3Cz^3 + 3Dx^4 + 3Ex^5 \text{ u. f.} \\ &\qquad + 3Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5 \text{ u. f.} \end{aligned}$$

Also wird $2A = 1$ und $A = \frac{1}{2}$; $2B + \frac{3}{2} = 2$, und $B = \frac{1}{4}$; $2C + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 0$, und $C = -\frac{7}{8}$; $2D - \frac{21}{8} + \frac{1}{4} = 0$, und $D = \frac{19}{16}$; $2E + \frac{57}{16} - \frac{7}{8} = 0$, und $E = -\frac{23}{32}$; $2F - \frac{69}{32} + \frac{19}{16} = 0$, und $F = \frac{31}{64}$. Demnach ist $\frac{1 + 2x}{2 + 3x + x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{7}{8}x^2 + \frac{19}{16}x^3 - \frac{23}{32}x^4 + \frac{31}{64}x^5$ u. f., und $\frac{(1 + 2x)dx}{2 + 3x + x^2} = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{4}xdx - \frac{7}{8}x^2dx + \frac{19}{16}x^3dx - \frac{23}{32}x^4dx + \frac{31}{64}x^5dx$ — u. f., mithin $\int. \frac{(1 + 2x)dx}{2 + 2x + x^2} = \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{2 \cdot 4} - \frac{7x^3}{3 \cdot 8} + \frac{19x^4}{4 \cdot 16} - \frac{23x^5}{5 \cdot 32} + \frac{31x^6}{6 \cdot 64} - +$ const.

§. 81.

§. 81.

Was die Differenzialexponentialfunctionen betrifft, so läßt sich umgekehrt aus dem Differenziale das Integral leicht finden. Weil nämlich im natürlichen Logarithmensysteme $d . a^x = a^x dl . a$ ist, so ist auch $\int . a^x dl . a = a^x + const.$ In jedem andern Systeme muß die Exponentialgröße a^x durch den Model dividiret werden. Zur Bestimmung der Integrale dieser Art von Differenzialfunctionen verschaffen ebenfalls die Substitutionen von veränderlichen Größen, welche den Exponentialgrößen gleichgesetzet werden, viele Vortheile. Es sey z. B. die Differenzialfunction $b^x dl . b$ gegeben, man sucht das Integral. Man setze $b^x = y$, so hat man $xl . b = l . y$ und $dxl . b = \frac{dy}{y}$; mithin verwandelt sich die Function $b^x dl . b$ in $y . \frac{dy}{y} = dy$, und man findet $\int . b^x dl . b = y + const. = b^x + const.$ Folgende besonders merkwürdige Fälle können zur Erläuterung dienen.

1. Es ist die Function $e^x dx(x^n + nx^{n-1}) = e^x x^n dx + ne^x x^{n-1} dx$ gegeben, man sucht das Integral. Man setze $e^x x^n = y$, so hat man $dy = e^x x^n dx + ne^x x^{n-1} dx$, mithin $\int . (e^x x^n dx + ne^x x^{n-1} dx) = y + const. = e^x x^n + const.$

2. Es ist die Differenzialfunction $e^x x dx$ gegeben, man sucht das Integral. Man setze $e^x x = y$, so hat man $dy = e^x x dx + e^x dx$, und $e^x x dx = dy - e^x dx$. mithin $\int . e^x x dx = y - e^x = e^x x - e^x + const. = e^x(x - 1) + const.$

3. Es ist die Differenzialfunction $e^x xxdx$ gegeben, man sucht das Integral. Man setze $e^x xx = y$, so ist $dy = e^x xxdx + 2e^x xdx$, und $e^x xxdx = dy - 2e^x xdx$, also wird $\int . e^x xxdx = y - \int . 2e^x xdx +$ const. Vermöge des vorigen Falles ist aber $\int . 2e^x xdx = 2e^x(x - 1)$; mithin findet man $\int . e^x xxdx = e^x xx - 2e^x x + 2e^x +$ const. $= e^x(x^2 - 2x + 2) +$ const.

§. 82.

Wenn irrationale Differenzialfunctionen entweder ganz oder gebrochene zur Integration gegeben oder gefunden sind, so gibt es einige Fälle, wo das Integral in endlichen Ausdrückungen bestimmt werden kann; allein hierzu sind Formeln nöthig, welche hier auszuführen zu weitläuftig seyn würden. In den meisten Fällen aber hat man keine andern Wege, das Integral zu finden, als wenn man die irrationalen Functionen in unendliche Reihen verwandelt, und alsdenn jedes Glied integriret.

§. 83.

Außer den bisher angegebenen Regeln zur Integration der Differenzialfunctionen sind besonders noch die Integrale der trigonometrischen Differenziale merkwürdig. Diese Integrale findet man sehr leicht, wenn man die im §. 68. angegebene Differenziale umkehret. Hiernach erhält man also

1. $\int . dz . \cos. z = \sin. z +$ const. $= - \cos. v. z +$ const.
2. $\int . dz . \sin. z = - \cos. z +$ const. $= \sin. v. z +$ const.

3.

3. $\int . \frac{dz}{\cos. z^2} = \text{tang. } z + \text{const.}$

4. $\int . \frac{dz}{\sin. z^2} = - \text{cota. } z + \text{const.}$

5. $\int . \frac{dz . \cos. z}{\sin. z^2} = - \text{cosec. } z + \text{const.}$

6. $\int . \frac{dz . \sin. z}{\cos. z^2} = \text{seca. } z + \text{const.}$

7. $\int . \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = A . \sin. x + \text{const.} = - A . \cos. x + \text{const.}$

8. $\int . \frac{dx}{x^2 + 1} = A . \text{tang. } x + \text{const.} = - A . \text{cota. } x + \text{const.}$

9. $\int . \frac{dx}{x\sqrt{(x^2 - 1)}} = A . \sec. x + \text{const.} = - A . \text{cosec. } x + \text{const.}$

10. $\int . \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}} = A . \sin. v. x + \text{const.} = - A . \cos. v. x + \text{const.}$

§. 84.

Mit Hülfe dieser Integralformeln lassen sich alle mögliche Differenzialfunctionen, welche trigonometrische Größen enthalten, integriren; man muß sie nur auf eine dieser Formen zurückzubringen wissen. Wenn z. B. das Differenzial $\frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$ gegeben ist, so dividire man Zähler und Nenner durch r, und man erhält

$$\frac{\frac{1}{r}\,.\,dx}{\frac{1}{r}\sqrt{(r^2-x^2)}} = \frac{\frac{1}{r}\,.\,dx}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{r}\right)}},$$ und dieser Ausdruck

hat die Form von n. 7 im vorigen §.; also ist

$$\int.\frac{\frac{1}{r}\,.\,dx}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)}} = A\,.\,\sin.\frac{x}{r} + \text{const.} = -A$$

$\cos.\frac{x}{r} + \text{const.}$

Es sey ferner $\frac{dx}{x^2+r^2}$ gegeben. Man dividire wiederum Zähler und Nenner durch r^2, so hat man

$\frac{\frac{1}{r^2}\,.\,dx}{\frac{x^2}{r^2}+1}$, und dieser Ausdruck hat die Form von n. 8;

also ist $\int.\frac{dx}{x^2+r^2} = A\,.\,\text{tang.}\frac{x}{r} + \text{const.} = -\frac{1}{r}.$

$A\,.\,\cot.\frac{x}{r} + \text{const.}$

Ist weiter die Differenzialfunction $\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-r^2)}}$ gegeben, so findet man auf eine ähnliche Art wie vorhin

$$\frac{\frac{dx}{r^2}}{\frac{x\sqrt{(x^2-r^2)}}{r^2}} = \frac{\frac{1}{r}\,.\,\frac{dx}{r}}{\frac{x}{r}\sqrt{\left(\frac{x^2}{r^2}-1\right)}},$$ und dieser Ausdruck

hat

hat die Form von n . 9; also ist das Integral

$$\int . \frac{dx}{x\sqrt{(x^2 - r^2)}} = \frac{1}{r} A . \text{sec. } x + \text{const.} = - \frac{1}{r} A . \text{cosec. } \frac{x}{r} + \text{const.}$$

Noch ferner sey die Function $\frac{dx}{\sqrt{(rx - x^2)}}$ gegeben; man hat also auf ähnliche Art wie vorhin

$$\frac{\frac{2dx}{r}}{\frac{2\sqrt{(rx - x^2)}}{r}} = \frac{d . \frac{2x}{r}}{\frac{\sqrt{(4rx - x^2)}}{r}} = \frac{d . \frac{2x}{r}}{\sqrt{(2 . \frac{2x}{r} - \frac{x}{r^2})}}$$

mithin $\int . \frac{dx}{\sqrt{(rx - x^2)}} = A . \text{sin. v. } \frac{2x}{r} + \text{const.}$

$$= - A . \text{cos. v. } \frac{2x}{r} + \text{const.}$$

§. 85.

Sollten auch die Differenzialformeln noch mehr zusammengesetzet seyn, so läßt sich auf eine ganz ähnliche Art von denselben das Integral finden, wenn man sie nur auf eine der im §. 83. angeführten Formen bringet. Einige Beyspiele zum Besten der Anfänger werden hinreichende Deutlichkeit geben.

1. Man sucht von $\frac{adx}{b + cx^2}$ das Integral. Man dividire Zähler und Nenner durch c, so erhält man

$$\frac{\frac{a}{c} . dx}{\frac{b}{c} + x^2} = \frac{\frac{a}{c} . dx}{\sqrt{\frac{b}{c}} . \sqrt{\frac{b}{c}} + x^2},$$ und der Nenner hat

nun

nun die gehörige Form. Man setze ferner $\sqrt{\frac{b}{c}} = n$, so wird $\frac{b}{c} = n^2$. Nun dividire man Zähler und Nenner durch n^2, so ergibt sich $\frac{a}{c} \cdot \frac{\frac{dx}{n^2}}{1 + \frac{x^2}{n^2}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\frac{1}{n} \cdot d \cdot \frac{x}{n}}{1 + \frac{x^2}{n^2}}$, und dieser Ausdruck hat die Form von n. 8; also hat man $\int \cdot \frac{adx}{b + cx^2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{1}{n} A \text{ tang } \frac{x}{n} +$ const. Substituirt man statt n den gleichen Werth, so wird $\int \cdot \frac{adx}{b + cx^2} = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot A \cdot \text{tang.} \frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b}} + \text{cst.}$

2. Man sucht von $\frac{cadx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ das Integral. Man dividire Zähler und Nenner durch a, so erhält man $ca \cdot \frac{\frac{dx}{a}}{\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}} = ca \cdot \frac{d \cdot \frac{x}{a}}{\sqrt{(1 - \frac{x^2}{a^2})}}$, und hievon ist das Integral $ca \cdot A \cdot \sin. \frac{x}{a} + \text{const.}$

3. Man soll $dx \cdot \cos. ax$ integriren. Man setze $ax = y$, so hat man $adx = dy$, und $dx = \frac{dy}{a}$;

dadurch

dadurch verwandelt sich die Function in diese: $\frac{dy}{a} \cdot \cos. y = \frac{1}{a} \cdot dy \cdot \cos. y$, und das Integral ist $\frac{1}{a} \sin. y + \text{const.} = \frac{1}{a} \sin. ax + \text{const.}$

4. Eben so findet man $\int. dx \sin. ax = -\frac{1}{a} \cdot \cos. ax + \text{const.}$

5. Von $dx \cdot \sin. \frac{x}{a}$ finde also das Integral. Man setze $\frac{x}{a} = y$, so hat man $x = ay$, und $dx = ady$, mithin verwandelt sich jene Function in diese: $ady . \sin. y$, und man findet $\int. ady \sin. y = -a \cos y + \text{const.}$; demnach wird $\int. dx \sin. \frac{x}{a} = -a \cos. \frac{x}{a} + \text{const.}$

6. Man soll das Integral von $\frac{dx}{\cos. nx^2}$ finden. Auf eine ähnliche Art wie vorhin ergibt sich $\int. \frac{dx}{\cos. nx^2} = \frac{1}{n} \text{tang. } nx^2 + \text{const.}$

§. 86.

Was die Integration der Differenzialfunctionen von zwey veränderlichen Größen betrifft, so weiß man aus der Differenzialrechnung, daß das Differenzial diese allgemeine Form hat: $dV = Adx + Bdy$, wo A und B

Functionen von x und y sind. Von einer solchen Differenzialfunction läßt sich das Integral nach folgenden Regeln sehr leicht finden, wenn die Functionen A und B eine solche Beziehung gegen einander haben, daß $\left(\frac{dA}{dy}\right)$ $= \left(\frac{dB}{dx}\right)$ ist.

1. Man integrire zuerst den Theil Adx, indem man bloß x als veränderlich, y aber als beständig betrachtet.

2. Hierauf differenziire man das Integral $\int . Adx$ mit der Voraussetzung, daß ganz allein y als veränderlich angenommen wird, und subtrahire dieses gefundene Differenzial von dem andern Theile Bdy. Wird hierdurch die Differenz $= 0$, so hat man das Integral gefunden.

3. Würde aber diese Differenz nicht $= 0$, so erhält man dadurch doch wenigstens ein Differenzial der veränderlichen Größe y, dessen Integral, zu dem n. 1 gefundenen Integrale addiret, das verlangte Integral gibt. Diese Regeln werden folgende Beyspiele erläutern.

1. Das Integral von $xdy + ydx$ zu finden. Man integrire xdy in Rücksicht des y allein, so hat man $\int . xdy = xy$; dieses Integral in Rücksicht des x allein differenziiret, gibt ydx, mithin ist $ydx - ydx = 0$, und das gesuchte Integral ist $xy + \text{const.}$

2. Es sey $dV = \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}$.

Das Integral von $\frac{dx}{y}$ in Rücksicht des x allein ist $\frac{x}{y}$, und das Differenzial von diesem Integral in Rücksicht

des

des y allein $= -\frac{xdy}{y^2}$; also $-\frac{xdy}{y^2}+\frac{xdy}{y^2}=0$,

und daher das gesuchte Integral $=\frac{x}{y}+\text{const.}$

3. Es sey $dV=(2ax+by+3cy^2x^2)dx+(bx+2cx^3y)dy$. Von dem ersten Theile findet man das Integral in Rücksicht des $x=ax^2+byx+cy^2x^3$; das Differenzial von diesem Integrale in Rücksicht des y ist $=(bx+2cyx^3)dy$, und daher $(bx+2cyx^3)dy-(bx+2cyx^3)dy=0$; also das verlangte Integral $=ax^2+byx+cy^2x^3+\text{const.}$

4. Es sey $dV=2aydy+x^2dy+2xydx$. Von $2xydx$ ist das Integral $=yx^2$; hievon das Differenzial $=x^2dy$, also $2ay2y+x^2dy-x^2dy=2aydy$, wovon das Integral $=yx^2+ay^2+\text{const.}$

5. Es sey $dV=\frac{(2ax-by^2)dx-2bydy}{2\sqrt{(ax^2+bxy^2)}}$. Von dem ersten Theile ist in Ansehung des x das Integral $=\sqrt{(ax^2-bxy^2)}$; dieses Integral in Rücksicht des y allein differenziiret gibt $\frac{-bydy}{\sqrt{(ax^2+bxy^2)}}$; also wird $\frac{-2bydy}{2\sqrt{(ax^2+bxy^2)}}+\frac{bydy}{\sqrt{(ax^2+bxy^2)}}=0$, und es ist das gesuchte Integral $=\sqrt{(ax^2-bxy^2)}+\text{const.}$

6. Es sey $dV=dyl.x+\frac{ydx}{x}$ gegeben, man sucht das Integral. Von $\frac{ydx}{x}$ ist das Integral $=yl.x$, und hievon das Differenzial $dyl.x$, mithin $dyl.x$

$- dyl \cdot x = 0$; also das gesuchte Integral $= yl \cdot x + const.$

7. Es sey $dV = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{xdy}{x^2 + y^2} - \frac{ydx}{x^2 + y^2}$. Von dem ersten Theile ist in Rücksicht des y das Integral $= A \cdot tang. \frac{y}{x}$, den Halbmesser $= x$ gesetzt. Von diesem Integrale wird in Rücksicht des x das Differenzial $= \frac{- ydx}{x^2 + y^2}$; also ist das verlangte Integral $V = A \cdot tang. \frac{y}{x} + const.$

§. 87.

Wenn in der allgemeinen Form $dV = Adx + Bdy$, $dV = 0$ ist, so ist auch $Adx + Bdy = 0$, und auf diese allgemeine Form läßt sich eine jede Differenzialgleichung zurückbringen. Wenn alsdenn $\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$ ist, so kann man nach den nämlichen Regeln des vorigen §. eine jede Differenzialgleichung von zwey veränderlichen Größen integriren. Allein das Verhalten des A und B kann in einer Differenzialgleichung wegfallen, wenn ein jeder Theil in derselben durch eine veränderliche Größe entweder multiplicirt oder dividirt worden. Alsdenn läßt sich aber auch eine solche Differenzialgleichung nach diesen Regeln nicht integriren.

Es

Es sey z. B. $nxy^{n-1}dx + y^n dx = 0$, wo $\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$ Statt findet; mithin ist die Gleichung integrabel. Wenn sie aber durch y^{n-1} dividiret wird, so erhält man $nxdy + ydx = 0$, wo das vorige Verhalten des A und B aufgehoben ist; mithin würde sich diese Gleichung nicht anders integriren lassen, als wenn sie erst vorher durch y^{n-1} multiplicirt wäre.

Gesetzt also, in der Differenzialgleichung $Adx + Bdy = 0$ würden die Functionen A und B durch eine veränderliche Größe entweder multiplicirt oder dividiret, und es entstehe dadurch die Differenzialgleichung $Pdx + Qdy = 0$, wo das Verhalten des P und Q gegen einander unbekannt ist. Aus dieser Gleichung erhält man $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$, und aus $Adx + Bdy = 0$ folgt $\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B}$; mithin $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B}$. Nun setze man $P = MA$, und $Q = MB$: so ergibt sich $MAdx + MBdy = 0$, und daher $\left(\frac{d \,.\, MA}{dy}\right) = \left(\frac{d \,.\, MB}{dx}\right)$. Könnte man daher den gemeinschaftlichen Factor M finden, so würde auch eine solche Differenzialgleichung integriret werden können. Allein es ist bis jetzt noch keine allgemeine Methode bekannt, einen solchen Factor zu finden. Das ist die Ursache, warum die Analytiker mehr auf specielle Methoden gedacht haben, die Integrale solcher Differenzialfunctionen zu bestimmen. Eine von diesen Methoden ist vorzüglich diejenige, wo die eine veränderliche Größe x von der veränderlichen Größe y abgesondert wird.

§. 88.

§. 88.

In einer Differenzialgleichung von zwey veränderlichen Größen x und y diese beyden veränderlichen Größen von einander absondern heißt, die Gleichung in eine andere verwandeln, deren jedes Glied ein Produkt aus einer Function einer veränderlichen Größe in deren Differenzial ist, wie die Gleichung $Adx = Bdy$, wo A eine Function von x und B eine Function von y ist. Es gibt einige Fälle, bey welchen sich die Absonderung der veränderlichen Größen x und y sehr leicht darbietet; in andern Fällen finden sich aber mehrere Schwierigkeiten. Einige Beyspiele sind diese:

1. Es sey $aydx = y^2dy$ gegeben. Dividiret man auf beyden Seiten durch y, so erhält man $adx = ydy$, wo die veränderlichen Größen abgesondert sind. Es ist also das Integral $ax = \frac{1}{2}y^2$ oder $2ax = y^2$.

2. Es sey $\frac{y^2}{a - x} = \frac{ydx}{dy}$. Man erhält hieraus $y^2dy = aydx - xydx$ oder $ydy = adx - xdx$, wo abermals die veränderlichen Größen abgesondert sind; also ist das Integral $\frac{1}{2}y^2 = ax - \frac{1}{2}x^2$ oder $y^2 = 2ax - x^2$.

§. 89.

Die Absonderung der veränderlichen Größen x und y findet besonders bey allen homogenen Differenzialfunctionen Statt. Es kann nämlich eine solche Function die allgemeine Gestalt $\frac{dx}{dy} = \frac{P}{Q}$ erhalten, wo P und Q homogene Functionen sind. Man setze nun $x = yz$, und substituire diesen Werth von x in die Functionen P

und

und Q: so werden die Glieder von P und Q durch die Potenz von y multiplicirt seyn; dividiret man also Zähler und Nenner von $\frac{P}{Q}$ mit der Potenz von y, so erhält man dadurch eine Function von z. Weil nun $x = yz$, mithin $dx = zdy + ydz$, und $\frac{dx}{dy} = z + \frac{ydz}{dy}$ ist: so hat man auch $z + \frac{ydz}{dy} = \frac{P}{Q}$ oder $\frac{P}{Q} - z = \frac{ydz}{dy}$ oder $\frac{1}{\frac{P}{Q} - z} = \frac{dy}{ydz}$, und $\frac{dz}{\frac{P}{Q} - z} = \frac{dy}{y}$; folglich l. $y = \int . \frac{dz}{\frac{P}{Q} - z}$. Wenn dieses Integral ebenfalls durch Logarithmen ausgedruckt werden kann, so daß l. y den Logarithmen irgend einer Function von z gleich ist: so erhält man eine algebraische Gleichung zwischen y und z, und daher, statt z den gleichen Werth $\frac{x}{y}$ gesetzt, eine algebraische Gleichung zwischen y und x. Zur Erläuterung dieses Allgemeinen dienen folgende Beyspiele.

1. Man soll von der homogenen Differenzialgleichung $xdx + ydy = xdy - ydx$ das Integral suchen. Man findet hieraus $\frac{dx}{dy} = \frac{x - y}{x + y}$, wo also $x - y = P$ und $x + y = Q$ bedeutet. Nun setze man $x = yz$, so wird $dx = ydz + zdy$; also $\frac{dx}{dy} = z + \frac{ydz}{dy} =$

$x - y$

$\frac{x-y}{x+y}$, oder $\frac{ydz}{dy} = \frac{x-y}{x+y} - z = \frac{yz-y}{yz+y} - z$
$= \frac{yz - y - yz^2 - yz}{yz+y} = \frac{-(z^2+1)y}{(z+1)y} =$
$\frac{-(z^2+1)}{z+1}$; folglich $\frac{dy}{y} = - \frac{(1+z)dz}{1+z^2} = -$
$\frac{dz}{1+z^2} - \frac{zdz}{1+z^2}$, und daher das Integral $l.y =$
$A.cota.z - l.\sqrt{(1+z^2)} + const.$ Setzt man statt z den Werth $\frac{x}{y}$, so erhält man das verlangte Integral $l.y = A.cot.\frac{x}{y} - l.\sqrt{\frac{(y^2+x^2)}{y^2}} + const.$
oder $l.y + l.\frac{1}{y}\sqrt{(y^2+x^2)} = A.cot.\frac{x}{y} + const.$
oder $l.\sqrt{(y^2+x^2)} = A.cota.\frac{x}{y} + const.$

2. Man soll von der homogenen Differenz-Gleichung $xdy - ydx = dx\sqrt{(x^2+y^2)}$ das Integral suchen. Man erhält hieraus $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y+\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Setzt man nun $x = yz$, mithin $dx = ydz + zdy$: so wird

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ydz}{dy} + z = \frac{x}{y+\sqrt{(x^2+y^2)}} =$$

$$\frac{yz}{y+\sqrt{(y^2z^2+y^2)}} = \frac{yz}{y(1+\sqrt{(z^2+1)})} =$$

$\frac{z}{1+\sqrt{(z^2+1)}}$; mithin $\frac{ydz}{dy} = \frac{z}{1+\sqrt{(z^2+1)}} -$

z

$$x = \frac{z - z - z\sqrt{(z^2+1)}}{1+\sqrt{(z^2+1)}} = \frac{-z\sqrt{(z^2+1)}}{1+\sqrt{(z^2+1)}};$$

mithin $\frac{dy}{y} = -\frac{(1+\sqrt{(z^2+1)})dz}{z\sqrt{(z^2+1)}} = \frac{-dz}{z\sqrt{(z^2+1)}}$ $- \frac{dz\sqrt{(z^2+1)}}{z\sqrt{(z^2+1)}} = \frac{-dz}{z\sqrt{(z^2+1)}} - \frac{dz}{z}$, und das Integral $l.y = l.\frac{1+\sqrt{(z^2+1)}}{z} - l.z + l.C$, oder $l.y + l.z = l.\frac{1+\sqrt{(z^2+1)}}{z} + l.C$, oder $l.yz = l.\frac{(1+\sqrt{(z^2+1)})C}{z}$, und statt z den gleichen Werth $\frac{x}{y}$ gesetzt, $l.x = l.\frac{(y+\sqrt{(x^2+y^2)})C}{x}$ oder $l.x = l.\frac{xC}{\sqrt{(x^2+y^2)}-y}$, oder $x = \frac{xC}{\sqrt{(x^2+y^2)}-y}$, oder $\sqrt{(x^2+y^2)} = C + y$; mithin $x^2 + y^2 = C^2 + 2Cy + y^2$, und $x^2 = C^2 + 2Cy$.

§. 90.

Da die Methode, das Integral durch Absonderung der veränderlichen Größen bey den homogenen Differenzialfunctionen zu finden, allgemein ist: so haben sich die Analysten Mühe gegeben, die heterogenen Differenzialgleichungen in homogene zu verwandeln. Allein, unerachtet aller ihrer angewandten Mühe ist doch noch keine allgemeine Methode bekannt geworden. Der einzige Kunstgriff hiebey kommt auf eine geschickte Substi-

tution der Größen an. Indessen gibt es auch heterogene Differenzialfunctionen, bey welchen sich die veränderlichen Größen absondern lassen, ohne sie vorher in homogene zu verwandeln, von welchen aber der Weitläuftigkeit wegen hier nicht gehandelt werden kann.

§. 91.

In der Differenzialrechnung ist gezeiget worden, daß, wenn V eine homogene Function der beyden veränderlichen Größen x und y von n Dimensionen sind, mithin $dV = Adx + Bdy$ allgemein gesetzet werden kann, nothwendig seyn muß $nV = Ax + By$. Wenn daher $Adx + Bdy$ eine Differenzialfunction ausdruckt, welche integrabel ist, und wo A und B homogene Functionen von $n - 1$ Dimensionen sind: so hat man gar keine Integration nöthig, sondern man erhält schon von selbst $V = \frac{1}{n}(Ax + By)$. Deutlich genug werden dies folgende Beyspiele zeigen.

1. Es ist $dV = \frac{(2x^3 - 3x^2y - y^3)dx + (3y^2x - 3y^3 + x^3 + y^3)dy}{(x-y)^2}$ gegeben. Hier ist $A = \frac{2x^3 - 3x^2y + y^3}{(x-y)^2}$, und $B = \frac{3y^2x - 2y^3 + x^3}{(x-y)^2}$, also homogene Functionen von 1 Dimension, und es ist daher $n = 2$. Demnach hat man $V = \frac{1}{2}\frac{(2x^3 - 3x^2y + y^3)x}{(x-y)^2} + \frac{1}{2}\frac{(3y^2x - 2y^3 + x^3)y}{(x-y)^2}$ oder $V = \frac{1}{2}$.

2x⁴

$$\frac{2x^4 - 3x^3y + xy^3 + 3y^3x - 2y^4 + x^3y}{(x-y)^2}$$, oder V

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{(2x^3 + 2y^3)\,(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{x^3 + y^3}{x-y}.$$

2. Es sey $dV = \frac{(4y^3x^2 - 3y^5)dy - y^4xdx}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}}$

gegeben. Also ist hier $A = \frac{-y^4x}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}}$ und $B = \frac{4y^3x^2 - 3y^5}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}}$, und A und B homogene Functionen von 2 Dimensionen, mithin $n = 3$; daher hat man $V = \tfrac{1}{3}\,\frac{(4y^3x^2 - 3y^5)y - y^4x^2}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}} = \frac{3y^4x^2 - 3y^6}{3\sqrt{(x^2-y^2)^3}} = \frac{y^4(x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}} = \frac{y^4}{\sqrt{(x^2-y^2)}}.$

§. 92.

Was die Integration der Differenzıale von der zweyten und höhern Ordnung betrifft, so lassen sich die Integrale von solchen Differenzialien, welche bloß die einzige veränderliche Größe x enthalten, nach den bisher angeführten Regeln finden. Wenn aber die Differenzialfunction eine Function von zwey veränderlichen Größen ist, so haben diese immer andere und andere Formen, je nachdem man entweder dx oder dy, oder irgend ein anderes Differenzial als beständig angenommen hat, oder wenn gar kein Differenzial als beständig betrachtet worden. Hiebey hat es der Analytik noch nicht geglückt, allgemeine Regeln zur Integration festzusetzen. Ja es gibt hier verschiedene Fälle, welche die Kräfte der Ana-

lyse zu übertreffen scheinen. Folgende Beyspiele werden am besten zeigen, wie man sich dabey zu verhalten hat.

1. Man sucht das Integral von $3x^2dx^2$, wo dx als beständig betrachtet worden. Man hat also $\int . 3x^2dx^2 = x^3dx + \text{const.}$

2. Von $6xdx^2 + 3x^2d^2x$ ist das Integral $3x^2dx + \text{const.}$

3. Es sey $dV = \frac{dyd^2x - dxd^2y}{dy^2}$. Man setze $dy = z$, also $dy^2 = z^2$ und $d^2y = dz$; ferner sey $dx = v$, folglich $d^2x = dv$. Hiernach verwandelt sich also die gegebene Function in diese: $\frac{zdv - vdz}{z^2} = \frac{dv}{z} - \frac{vdz}{z^2}$. Integriret man nun $\frac{dv}{z}$ in Rücksicht des v, so erhält man $\int . \frac{dv}{z} = \frac{v}{z}$; von diesem Integral ist das Differenzial in Rücksicht des $z = -\frac{vdz}{z^2}$, folglich $-\frac{vdz}{z^2} + \frac{vdz}{z^2} = 0$, und daher das Integral $= \frac{v}{z} + \text{const.} = \frac{dx}{dy} + \text{const.}$

4. Es sey $dV = \frac{2y^2dxd^2x - 2ydydx^2}{y^4}$. Man setze $z = y$, und $v = dx^2$: so hat man $2ydy = dz$, und $dv = 2dxd^2x$; mithin verwandelt sich die Function in diese: $\frac{zdv - vdz}{z^2} = \frac{dv}{z} - \frac{vdz}{z^2}$. In Rück-

sicht

sicht des v allein findet man $\int . \frac{dv}{z} = \frac{v}{z}$, und hievon das Differenzial in Rücksicht des $z = -\frac{vdz}{z^2}$, folglich $-\frac{vdz}{z^2} + \frac{vdz}{z^2} = 0$, und daher das gesuchte Integral $= \frac{v}{z} + \text{const.} = \frac{dx^2}{y^2} + \text{const.}$

Sechster Abschnitt.
Erste Gründe der Variationsrechnung.

---

§. 93.

Es sey (Fig. 5.) MFN eine krumme Linie, und FH ein Theil derselben, wozu die Axe AO gehört. Auf derselben stehen die Ordinaten FB und HD senkrecht, wozu die Abscissen AB und AD gehören. Es sey AB $= x$, BF $= y$: so ist AD $= x + \Delta x$ und DH $= y + \Delta y$, wo Δx und Δy, wie aus dem ersten Abschnitte erhellet, nichts weiter bedeuten, als die Zuwächse oder Differenzen der Abscissen und der dazu gehörigen Ordinaten, welche so groß oder klein seyn mögen, als man will, mithin auch als endlich angenommen werden können. Nun nehme man aber auch an, KGIL sey eine andere krumme Linie, wozu die Abscissen AC und AE, und die Ordinaten CG und EI gehören. Diese krumme

Linie

Linie heiße die variirte der ersten krummen Linie MFN; ferner benenne man auch die zu dieser Linie gehörigen Coordinaten AC und CG, und AE und EI variirte der erstern AB und BF, und AD und DH. Man bezeichne $AC = x + \delta x$, $CG = y + \delta y$: so hat man $AC = AB = x + \delta x - x = \delta x$, und $CG - BF = y + \delta y - y = \delta y$. Diese Ausdrücke δx und δy nennt man Variationen der Coordinaten x und y. Hieraus erhellet, daß Differenzen und Variationen von einander unterschieden sind. Die Differenz einer Abscisse oder einer Ordinate zeigt nämlich nur an, um wie viel sich die Abscisse oder Ordinate einer und derselben krummen Linie ändert; die Variation einer Abscisse oder einer Ordinate aber zeiget, wie viel sich die Abscisse oder Ordinate ändert, wenn sich die Abscisse und Ordinate in Abscisse und Ordinate der variirten Linie verändern. Man nimmt beständig an, daß die Variation unendlich klein sey, so daß also die variirte Linie von der nicht variirten unendlich wenig verschieden ist.

§. 94.

Es sey $AC = X$, $AB = x$, $AE = X'$, $AD = x'$, $CG = Y$, $BF = y$, $EI = Y'$, und $DH = y'$: so hat man vermöge des vorigen §.

$$AC - AB = X - x = \delta x$$
$$AE - AD = X' - x' = \delta x'$$
$$CG - BF = Y - y = \delta y$$
$$EI - DH = Y' - y' = \delta y'.$$

Weil ferner

$AE - AC = X' - X = \Delta X$, so ist $X' = X + \Delta X$

$X' - x' = \delta x'$, so ist $X' = x' + \delta x'$.

Y'

$Y' - y' = \delta y'$, so ist $Y' = y' + \delta y'$
$Y' - Y = \Delta y$, — $Y' = Y + \Delta Y$.

Hieraus ist also leicht begreiflich, daß seyn werde

$$X + \Delta X = x' + \delta x'$$
$$Y + \Delta Y = y' + \delta y'.$$

Noch weiter ist

$AC - AB = X - x = \delta x$, also $X = x + \delta x$
$AD - AB = x' - x = \Delta x$, $x' = x + \Delta x$
$CG - BF = Y - y = \delta y$, $Y = y + \delta y$
$DH - BF = y' - y = \Delta y$, $y' = y + \Delta y$.

Setzt man also diese Werthe von X, x', Y und y' in diese beyden Gleichungen

$X + \Delta X = x' + \delta x$, und
$Y + \Delta Y = y' + \delta y'$, so ergibt sich

$x + \delta x + \Delta(x + \delta x) = x + \Delta x + \delta(x + \Delta x)$, und
$y + \delta y + \Delta(y + \delta y) = y + \Delta y + \delta(y + \Delta y)$, oder
$x + \delta x + \Delta x + \Delta\delta x = x + \Delta x + \delta x + \delta\Delta x$
$x \quad + \Delta x + \delta x \qquad = x + \Delta x + \delta x$ subtrahirt,

$$\Delta\delta x = \delta\Delta x, \text{ und}$$

$y + \delta y + \Delta y + \Delta\delta y = y + \Delta y + \delta y + \delta\Delta y$
$y + \delta y + \Delta y \qquad = y + \delta y + \Delta y +$ subtrahirt,

$$\Delta\delta y = \delta\Delta y.$$

Diese beyden Gleichungen $\Delta\delta x = \delta\Delta x$ und $\Delta\delta y = \delta\Delta y$ geben in der Variationsrechnung diesen wichtigen Lehrsatz:

Die Differenz der Variation ist gleich der Variation der Differenz,

welcher Lehrsatz, wie hier erhellet, nicht allein für die variirten Abscissen, sondern auch für die variirten Applicaten gilt.

§. 95.

Wenn die Ordinaten DH und BF, so wie auch EI und CG einander unendlich nahe gesetzet werden: so hat man auch $d\delta x = \delta dx$, und $d\delta y = \delta dy$, oder mit Worten ausgedruckt:

die Variation des Differenzials ist gleich dem Differenzial der Variation.

Wenn ferner die Länge der krummen Linie MF = z heißt, so ist FH = dz, mithin KG = $z + \delta z$, und GI = $d(z + \delta z) = dz + d\delta z$. Offenbar ist aber auch GI = $dz + \delta dz$, mithin $d\delta z = \delta dz$. Dies gibt wiederum den Satz:

Das Differenzial der Variation der Länge ist gleich der Variation des Differenzials der Länge.

Bedeutet daher überhaupt V eine veränderliche Größe, welche sich das einemal um unendlich kleine Unterschiede ändert, ein anderesmal durch Variationen: so ist $d\delta V = \delta dV$. Setzt man nämlich den veränderten Werth von $V = V + dV = V'$, so hat man $dV = V' - V$, und $\delta dV = \delta V' - \delta V$; aber $\delta V' = \delta V + d\delta V$, mithin $d\delta V = \delta V' - \delta V$, und daher $\delta dV = d\delta V$.

§. 96.

Der im §. 94. angeführte Lehrsatz gilt nicht allein von der ersten Differenz, sondern von allen möglichen höhern Differenzen, mithin auch von allen möglichen höhern Differenzialen. Man hat nämlich $\delta\Delta^2 y = \delta\Delta(\Delta y) = \Delta\delta\Delta y$; es ist aber $\delta\Delta y = \Delta\delta y$, also ist auch $\delta\Delta^2 y = \Delta\Delta\delta y = \Delta^2\delta y$. Dieser Beweis gilt für alle höhern Differenzen; also ist $\delta\Delta^3 y = \Delta^3\delta y$, $\delta\Delta^4 y$

=

$= \Delta^4 \delta y$ u. f. Was aber für die Differenzen gilt, findet auch bey den Differenzialen Statt. Man hat also $\delta d^2 y = d^2 \delta y$; $\delta d^3 y = d^3 \delta y$ u. s. f.

§. 97.

Es sey z eine Größe, deren Differenzial $= v$ ist, oder es sey $dz = v$: so hat man $\delta dz = \delta v$. Nun ist aber $\delta dz = d\delta z$, also wird $d\delta z = \delta v$; mithin $\int . d\delta z = \int . \delta x$. Weiter ist $\int . d\delta z = \delta z = \delta \int . v$, demnach $\delta \int . v = \int . \delta v$, d. h.

die Variation des Integrals einer Function ist gleich dem Integrale der Variation eben derselben Function.

Aus den nämlichen Gründen ist auch $\delta \int^2 v = \int^2 \delta v$; $\delta \int^3 v = \int^3 \delta v$ u. s. f.

§. 98.

Die Variationsrechnung ist von der Differenzialrechnung wesentlich verschieden. Die Differenzialrechnung beruhet auf bestimmten und unveränderlichen Gesetzen; die Gesetze der Variationsrechnung hingegen sind willkührlich. In der Variationsrechnung kann eine Applikate variiren, wenn gleich die dazu gehörige Abscisse unverändert bleibt. Auch kann nur ein Theil einer krummen Linie variiren; alsdenn können aber auch nur diejenigen Applikaten variiren, welche zu diesem Theile der krummen Linie gehören. Ungeachtet dieser Unterschied in beyden Rechnungsarten wesentlich ist, so sind gleichwohl die Regeln in beyden einerley, und man kann daher die Variation einer Function sehr leicht finden, wenn man das Differenzial derselben zu finden weiß, indem

man nur nöthig hat, statt des Zeichens d das Zeichen δ zu setzen.

§. 99.

Es sey $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$ u. f. Hierdurch lassen sich, wie bekannt, die höhern Differenziale also ausdrucken:

$$d^2y = dpdx + pd^2x = qdx^2 + pd^2x,$$

$$d^3y = dqdx^2 + 2qdxd^2x + dpd^2x + pd^3x$$
$$= rdx^3 + 3qdxd^2x + pd^3x \text{ u. s. f.}$$

Wenn dx oder das Differenzial der Abscisse unveränderlich angenommen wird, so erhält man für die höhern Differenziale von y bloß Produkte aus q, r u. f. in die Potenzen von x. Man hat nämlich

$$d^2y = qdx^2 : d^3y = dqdx^2 = rdx^3 \text{ u. s. f.}$$

In dieser letzten Voraussetzung hat also dx kein Differenzial, wohl aber Variation; denn $\delta(x + dx) = \delta x + \delta dx = \delta x + d\delta x$.

§. 100.

Wenn mehrere Factoren in einander multipliciret sind, welche insgesammt variiren: so findet man die Variation des Produktes nach denselben Regeln, nach welchen das Differenzial gefunden wird. So findet man z. B. die Variation von $xy = x\delta y + y\delta x$. Das variirte Produkt ist nämlich $= (x + \delta x)(y + \delta y) = xy + x\delta y + y\delta x + \delta x\delta y$, und hievon xy subtrahirt, die Variation $x\delta y + y\delta x$; der letzte Theil $\delta x\delta y$ wird weggelassen, weil jede Variation in Vergleichung mit der Größe, welche variirt, unendlich klein angenommen wird. Wenn die eine von den variirten Größen, z. B. x, nicht

varii-

variiren sollte, so wird $\delta x = 0$, und es wird $\delta(xy) = x\delta y$, gerade so wie beym Differenziale. Von jeder andern Function wird die Variation derselben gerade so gefunden, als wenn das Differenzial gesuchet wird, indem man bloß statt des Zeichens d den Buchstaben δ zu setzen braucht.

§. 101.

Man setze $dy = pdx$, so wird $p = \frac{dy}{dx}$. Wenn nun die Variationen von x und y oder δx und δy gegeben sind, so läßt sich sehr leicht die Variation von $p = \frac{dy}{dx}$, oder $\delta p = \delta . \frac{dy}{dx}$ finden. Nach den bekannten Regeln der Differenzialrechnung findet man nämlich $\delta p = \frac{dx\delta dy - dy\delta dx}{dx^2}$, oder $\delta p = \frac{dxd\delta y - dyd\delta x}{dx^2}$. Hieraus findet man auch

$$\delta p = \frac{d\delta y - \frac{dy}{dx}d\delta x}{dx} = \frac{d\delta y - pd\delta x}{dx}.$$

Setzt man ferner $dp = qdx$, $dq = rdx$ u. s. f., so hat man $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ u. s., und man findet eben so leicht die Variationen von q, r u. s. f. Man hat nämlich $\delta q = \frac{dxd\delta p - dpd\delta x}{dx^2} = \frac{d\delta p - qd\delta x}{dx}$;

$$\delta r = \frac{dxd\delta q - dqd\delta x}{dx^2} = \frac{d\delta q - rd\delta x}{dx} \text{ u. s.}$$

§. 102.

§. 102.

Es ist V durch x und y und derselben Differenziale gegeben, man verlangt die Variation von V durch die Variationen von x und y auszudrucken. Man setze $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$ u. s., alsdenn läßt sich V in einer Function der endlichen Größen x, y, p, q, r u. s. ausdrucken. Hieraus folgt also, daß sich das Differenzial von V beständig auf diese Form bringen läßt:

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr \text{ u. f.},$$

wo M, N, P, Q, R u. s. Functionen von x und y und derselben Differenziale sind. Setzt man nun statt des Differenzialzeichens d das Variationszeichen δ, so erhält man auch die Variation von V. Demnach hat man

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{u. f.}$$

Setzt man in diesen Ausdruck statt δp, δq, δr die im vorigen §. angeführten Werthe, so ergibt sich

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + \frac{1}{dx}(Pd\delta y + Qd\delta p + Rd\delta q + \text{u. f.}) - \frac{d\delta x}{dx}(Pp + Qq + Rr + \text{u. f.})$$

Sollte x unvariirt bleiben, außerdem aber auch dx beständig seyn, so wird $\delta V = N\delta y + P \cdot \frac{d\delta x}{dx} + Q \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + R \cdot \frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{u. f.}$

Zur Erläuterung mögen folgende Beyspiele dienen:

1. Es sey $\frac{ydx}{dy}$ gegeben, man sucht die Variation. Man setze $dy = pdx$, so wird $\frac{ydx}{dy} = \frac{ydx}{pdx} = \frac{y}{p}$ =

$= V$, und das Differenzial $dV = \frac{pdy - ydp}{p^2} = \frac{dy}{p} - \frac{ydp}{p^2}$. In dem angeführten allgemeinen Ausdrucke von dV ist hier also $M = o$, $N = \frac{1}{p}$ und $P = -\frac{y}{p^2}$, $Q = o$ u. s. f., mithin die Variation $\frac{\delta y}{p} - \frac{y\delta p}{p^2}$. Setzt man statt δp den im vorigen §. gefundenen Werth, so wird $\delta V = \frac{\delta y}{p} - \frac{yd\delta y}{p^2 dx} + \frac{yd\delta x}{pdx} = \frac{dx}{dy} \cdot \delta y - \frac{ydx}{dy^2} d\delta y + \frac{y}{dy} d\delta x$.

2. Es ist $\frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$ gegeben, man sucht die Variation. Man setze $dy = pdx$, so hat man $dy^2 = p^2 dx^2$, und es wird $\frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} = \frac{y\sqrt{(dx^2 + p^2 dx^2)}}{pdx} = \frac{y}{p}\sqrt{(1 + p^2)}$. Hievon ist das Differenzial $\frac{dy}{y}\sqrt{(1 + p^2)} - \frac{ydp}{p^2\sqrt{(1 + p^2)}}$, mithin auch die Variation $\frac{\delta y}{y}\sqrt{(1 + p^2)} - \frac{y\delta p}{p^2\sqrt{(1 + p^2)}}$

Es ist also hier $M = o$, $N = \frac{\sqrt{(1 + p^2)}}{y}$, $P = \frac{y}{p^2\sqrt{(1 + p^2)}}$, $Q = o$ u. s. Setzt man daher statt

δp

δp den gefundenen Werth, so findet man die Variation

$$\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} \cdot \delta y - \frac{y\delta x}{dy^2\sqrt{(dx^2 + dy^2)}},$$

$(dxd\delta y - dyd\delta x)$.

§. 103.

Nicht so leicht ist es, die Variation einer Formel zu finden, welche hinter dem Integralzeichen stehet, wie z. B. von $\int . Vdx$, wo V eine Function von x, y, p, q, r u. s. seyn kann. Das Integral $\int . Vdx$ nennt man **einfach**, wenn V bloß durch x, y und deren Differenziale gegeben ist, mithin dV sich durch $Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$ u. s. ausdrucken läßt. Von den einfachen Integralen unterscheidet man die **zusammengesetzten** oder **verwickelten Integrale**, welche in ihnen selbst wiederum Integrale enthalten, wie z. B. $\int . Vdx = \int . (ydx + dx \int . \sqrt{(dx^2 + dy^2)})$.

Es ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß des Integrals Variation gleich ist dem Integrale der Variation. So ist also $\delta . \int . Vdx = \int . \delta(Vdx)$. Nun ist aber $\delta(Vdx) = V\delta dx + dx\delta V$, also wird $\int . \delta(Vdx) = \int . (V\delta dx + dx\delta V)$. Man setze $\delta x = w$, so wird $d\delta x = dw$. Nun hat man

$$\int . Vdw = Vw - \int . wdV \text{ oder}$$
$$\int . Vd\delta x = V\delta x - \int . \delta x dV, \text{ also wird}$$
$$\delta \int . Vdx = V\delta x - \int . \delta x dV + \int . dx\delta V,$$

wo also der erste Theil gänzlich vom Integrale befreyet ist.

Nun sey V eine Function von x, y, p, q, r u. s., so hat man $dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq +$ u. s., und $\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q +$ u. s. Setzt man also diese Werthe in vorige Formel, so ergibt

sich

sich $\delta\int . Vdx = V\delta x + \int . dx(M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q +$ u. f.$) - \int . \delta x(Mdx + Ndy + Pdp + Qdq +$ u. f.$)$. Nun ist aber $\int . dxM\delta x = \int . \delta xMdx$; mithin wird $\delta\int . Vdx = V\delta x + \int . N(dx\delta y - dy\delta x) + \int . P(dx\delta p - dp\delta x) + \int . Q(dx\delta q - dq\delta x) +$ f.

Für $dx\delta p$, $dx\delta q$ u. f. sind folgende Werthe gefunden worden: $dx\delta p = d\delta y - pd\delta x$; $dx\delta q = d\delta p - qd\delta x$ u. f. Setzt man also diese Werthe, so wie $dy = pdx$, in vorige Gleichung, so wird $\delta . \int . Vdx = V\delta x + \int . Ndx(\delta y - p\delta x) + \int . Pd(\delta q - p\delta x) + \int . Qd(\delta p - q\delta x) +$ u. f.

Ferner findet man nach den vorhergehenden $\delta p - q\delta x = \frac{d\delta y - pd\delta x - dp\delta x}{dx} = \frac{d(\delta y - p\delta x)}{dx}$ u. f. Setzt man um Kürze wegen $\delta y - p\delta x = w$, so wird $\delta p - q\delta x = dx . dw$ u. f. Also ergibt sich die Variation $\delta\int . Vdx = V\delta x + \int . Ndxw + \int . Pdw + \int . Q . d\backslash \frac{dw}{dx} +$ u. f. Der dritte Theil dieser Reihe läßt sich noch bequemer so ausdrucken: $\int . Pdw = Pw - \int . wdP$; auf eine ähnliche Art kann man den vierten Theil so ausdrucken: $\int . Q . d\frac{dw}{dx} = Q . \frac{dw}{dx} - \int . dQ . dw$; aber $\int . dQ . \frac{dw}{dx} = \int . \frac{dQ}{dx} . dw = \frac{dQ}{dx} . w - \int . wd . \frac{dQ}{dx}$, mithin $\int . Qd . \frac{dw}{dx} = Q . \frac{dw}{dx} - \frac{dQ}{dx}w + \int . wd . \frac{dQ}{dx}$ u. f. f. Hieraus findet man die Variation $\delta . \int . Vdx = \int . wdx(N - \frac{dP}{dx} + \frac{r}{dx}$

. d

$. d . \frac{dQ}{dx} -$ u. f.) $+ V\delta x + w(P - \frac{dQ}{dx} +$ u. f.) $+$ $\frac{dw}{dx}(Q -$ u. f.).

Folgendes Beyspiel wird dies Allgemeine erläutern.

Es sey $V = xy + xyp$, so hat man $dV = xdy + ydx + xpdx + xpdy + xydp$, oder $dV = (1+p) ydx + (1 + p)xdy + xydp$. Es ist also hier $M = (1 + p)y$, $N = (1 + p)x$, $P = xy$, $Q = 0$ u. f. Hieraus findet man $dP = xdy + ydx$, und $\frac{dP}{dx} = \frac{xdy}{dx} + y = px + y$, und $N - \frac{dP}{dx} = (1 + p)x - px - y = x - y$. Setzt man dx beständig, so wird der Ausdruck, welcher das Integralzeichen vor sich hat,

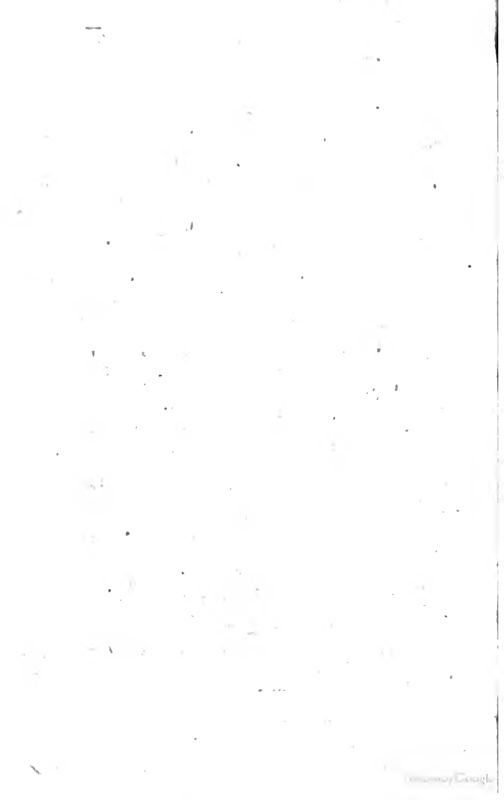
$dx\int . (\delta y - p\delta x)\ (x - y)$, und hiezu kommt noch

$+ V\delta x + (\delta y - p\delta x)xy$.

Dasjenige, was integrirt werden soll, ist $x\delta y - xp\delta x - y\delta y + py\delta x = x\delta y - \frac{xdy}{dx}\delta x - y\delta y + \frac{ydy}{dx}\delta x$.

In.

Inhalt.



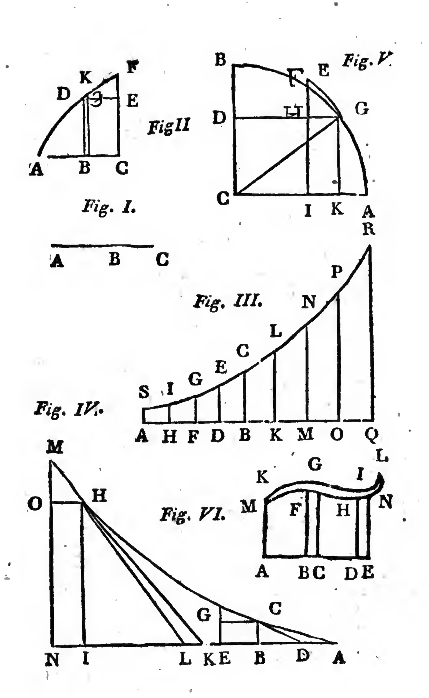
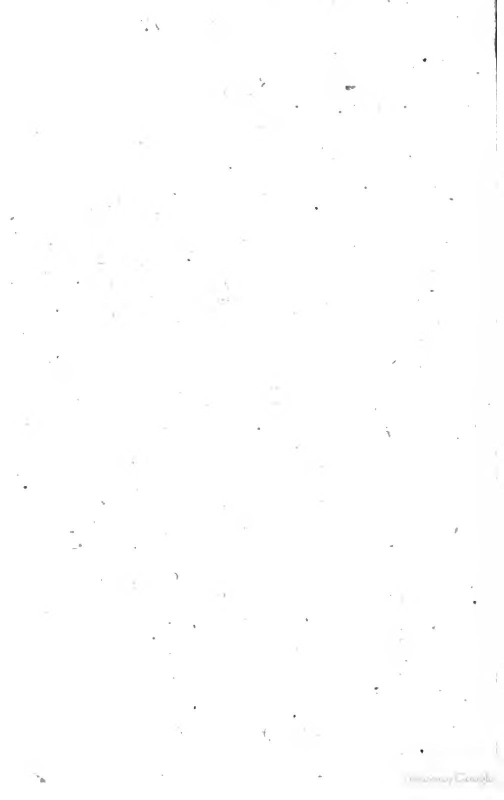


Fig. I.
A B C
K F
D E
Fig II
B E
Fig. V.
D G
C I K A
Fig. III.
A H F D B K M O Q
S I G E C L N P R
Fig. IV.
M O H N I L K E B D A G C
Fig. VI.
K G I L M N F H A B C D E



In dieser Verlagshandlung sind noch folgende empfehlungswerthe Werke erschienen.

Briefe der Lespinasse. Deutsch herausgegeben von Carol. Wilhelmine Spazier, geb. Mayer. 2 Thle. mit 1 Kupf. 3 Rthlr.

Lange hat sich Rec. von keiner Schrift so angezogen gefunden, als von der gegenwärtigen; aber selten hat sich auch eine geist- und gemüthreiche weibliche Individualität so unverhüllt ausgesprochen, als in diesen Briefen. Es ist auffallend, daß gerade unter dem Volke, welches das ganze äußere Leben einer eisernen Convenienz unterwarf, sich noch am öftersten die Eigenthümlichkeit des Characters, und zwar meist des weiblichen, zeigt, was freylich auch wieder national seyn möchte. Mlle. Lespinasse ist in Deutschland — besonders durch das rührende Todtenopfer von ihrem Freunde Dalembert, bekannt; wie ganz anders erscheint sie aber in diesen Briefen, das Weib, welches durch die glänzenden Gaben seines Geistes, durch eine vielseitige Bildung und die Grazie des Umgangs einen Kreis der herrlichsten Talente um sich vereinigte, das mit heiterm Ernste in die Ideen eines Diderot, Alembert und Helvetius einzugehen vermochte, wie so ganz weiblich ist es im Sturme der Leidenschaft, und welche sonderbare Anomalie, dieses Herz zu gleicher Zeit von einer dreyfachen Liebe zerrissen zu sehen!

Die Uebersetzung dieser Briefe war keine leichte Aufgabe, und ein Mann konnte sie schwerlich mit Erfolg unternehmen. Es liegt bey aller Schwäche soviel Zartheit in diesem Gemüthe, die Weiblichkeit ist so anhaltend im Kampfe mit der Neigung, und wo diese durch ihre Allgewalt siegt, da behauptet jene doch noch so entscheidend ihre Herrschaft über den Ausdruck, fast jegliches Wort ist eine so eigenthümliche Nüance des Characters und der Empfindung, daß der feinste weibliche Tact erfordert

wird, um von dem bedeutsamen Colorit nichts zu verwischen. Mad. Spazier hat das Original mit einer Treue und zugleich mit einer Lebendigkeit in unsere Sprache übergetragen, welche Bewunderung erregen, und dadurch, so wie in der dem zweyten Theile vorangeschickten Notiz über Mlle. Lespinasse bewiesen, wie vollkommen sie dieses wunderbare weibliche Wesen begriffen habe. Den ersten Theil schmückt das Bildniß der Mlle. Lespinasse, und das Aeußere des Buchs hat eine angemessene Eleganz.

F. A. Chateaubriand Tagebuch einer Reise von Paris aus, durch Griechenland, nach Jerusalem, und von Jerusalem durch Egypten, durch die barbaresken afrikanischen Staaten und durch Spanien zurück nach Paris. Aus dem Französischen übersetzt von J. H. Eichholz. 3 Thle. mit 8 Kupfern aus Mayers großem Kunstwerke: Ansichten von Palästina. gr. 8.

Der Verfasser der hier vorstehenden Reise-Schilderungen ist in Deutschland schon längst als einer der besten poetischen Köpfe des neueren Frankreichs durch seinen religiösen Roman, Attala, durch seinen Geist der christlichen Religion und durch seine Martyre rc. bekannt. Er hat unter dem gebildeten deutschen Lese-Publikum durch diese Werke nicht allein alle poetischen, oder für Poesie gestimmten Gemüther sich gewonnen, sondern auch unter allen denen, welche noch reinen und lebendigen Sinn für das Heiligste des Menschen, für Religion bewahrt haben, große Anhänger gefunden. Beiden Gattungen von Lesern wird daher das Tagebuch der hier angezeigten neuesten, merkwürdigen Reise des Herrn Verfassers, in der Bearbeitung des genannten Uebersetzers, der mit demselben vor einigen Jahren in Rom in einem freundschaftlichem Umgange lebte, eine gewiß sehr willkommene Erscheinung seyn, um so mehr, da eine poetische und religiöse Ansicht jener merkwürdigen Gegenden, wie sie diesem Schriftsteller und Gelehrten eigen ist, wohl durchaus zu den ganz neuen Darstellungen über das gelobte Land und die übrigen Gegenden, deren Schilderung in diesem Reise-Tagebuche enthalten ist, gehört.

Ich zeige daher allen Freunden und Verehrern des Herrn Verfassers hierdurch an, daß diese Uebersetzung zur Oster-Messe 1811 in meinem Verlage erscheinen wird.

Ehrenberg, Fr., Bilder des Lebens, 2 Bde. mit 2 Kupf. 8. 3 Rthlr.

Eickens, G. W. von, neuer Gesundheitskatechismus, oder Anleitung zu einer vernünftigen Gesundheitspflege für den Schul- und Hausunterricht 8. 8 Ggr.

Ewald, J. L., eheliche Verhältnisse und eheliches Leben, in Briefen. Fortsetzung von den beiden Schriften für Mädchen, Gattinnen und Mütter, sowohl als für Jünglinge, Gatten und Väter, 2 Thle. mit 2 Kupf. 3 Rthlr.

Herr Ober-Kirchenrath Ewald beschenkt hier das Publikum mit einem Werke, das in der Bibliothek jeder gebildeten Frau und jedes gebildeten Mannes zu stehen verdient. Es reiht sich ganz an die beiden Schriften für: „Mädchen, Gattinnen und Mütter", und für: „Jünglinge, Gatten und Väter", und wird darum Allen denen, welche diese beiden Bücher besitzen, oder sie kennen, doppelt angenehm und nützlich seyn. — Die Verhältnisse zwischen Gatten und Gattinn in Bezug auf sich selbst, auf die verschiedenen Lagen in dem ehelichen Leben, auf ihre nächsten Pflichten, und besonders auf die der Erziehung ihrer Kinder zu bestimmen; wahres Glück der Ehe zu befördern; — Liebe und Vertrauen der Gatten zu erhöhen und zu befestigen, sie vorzüglich auch mit reinen Ansichten der Religion bekannt zu machen: — ist die Haupttendenz dieses Buchs, welche durch einen Reichthum schöner, erhabener Gedanken, die den aufmerksamen Leser ergreifen, und sein Herz freundlich, sanft und gut stimmen, erreicht wird.

Die Verlagshandlung hat das Ihrige gethan, um diese Schrift, welche sich ein so schönes Ziel gesetzt hat, durch ein schönes Aeußere zu empfehlen.

Dasselbe 3ter Band mit 1 Kupf. 2 Rthlr.

Ewald, J. L., ist es rathsam die niedern Volksklassen aufzuklären? Und: wie muß diese Aufklärung seyn? Vermehrte Aufl. 8. 1 Rthlr. 12 Ggr.

Fischer, D. J. K., erste Gründe der Differenzial-, Integral- und Variationsrechnung, zum Unterricht für Anfänger und andere Liebhaber der Mathematik. Mit 1 Kupft. gr. 8. 12 Ggr.

Hahn, K., Omar. Ein Andachtsbuch für die Jugend, auch für das Alter, 2 Thle. m K. 1 Rthlr. 12 Ggr.

Unter diesem Titel hat uns der bekannte und beliebte Jugendschriftsteller, Karl Hahn, mit einem Werkchen beschenkt, das würdig ist, von jedem Jünglinge und Mädchen gelesen zu werden. Des Verfassers Wunsch und Plan waren, das Herz des Lesers zu Gott zu erheben, ihn mit Gottes weiser und gütiger Weltregierung näher bekannt zu machen, und ihm in jeder Lage seines Lebens die Fassung zu geben, welche er als Mensch und als Christ bedarf, und in welchen Tagen fühlte der bessere Mensch wohl mehr das Bedürfniß nach solchen Ermunterungen, als in den unsrigen? Wir freuen uns, überzeugend sagen zu können, daß das Büchlein vollkommen dem Zwecke des Verfassers entspricht. Eine rein-kindliche, edle Sprache, mit lieblichen Blumen zierlich geschmückt, bewegt das Herz des Lesers; — man betet, ohne es zu wissen, und Thränen, fromme Gefühle ankündigend, entquillen sanft dem Auge. Möchte das Büchlein nur recht viele Leser finden! Keiner wird es aus den Händen legen, ohne sich dem Höchsten, dem Heiligsten genähert zu haben; — Keiner wird es lesen, ohne Omarn lieb zu gewinnen, ohne den Entschluß zu fassen, sich ihm nachzubilden. Auch die Verlagshandlung hat es an einem reinen Drucke und an einem sehr gefälligen Aeußern, zur Ausstattung dieses Büchleins, nicht fehlen lassen.

Hahn, Karl, Parabeln für die Jugend, mit Kupf. 2 Bändchen. 1 Rthlr. 12 Ggr.

Der Ramolaçant. Ein Schausp. in 3 Aufz. Ein ächtes Gemählde unserer Tage, 8. 8 Ggr.

Reise nach den Inseln Teneriffa, Trinidad, St Thomas, St. Croix und Porto-Rico. Auf Befehl der französischen Regierung unter der Leitung des Capitäns Baudin von 1796 bis 1798 unternommen, und von Peter le Dru, einem der Naturforscher

der Expedition, beschrieben, und mit Anmerkungen von Sonnini versehen. 2 Bände, gr. 8.

Diese Reise gewährt in einer angenehmen Schreibart dem Leser eben so viel Belehrung als mannichfaltige Unterhaltung. Die Wichtigkeit der Producte Westindiens ist anjetzt so groß, daß sie über das Wohl und Wehe mehrerer Millionen in Europa entscheiden. Ein Werk, wie das vor uns liegende, von einem sachkundigen Beobachter geschrieben, kann daher wohl keinen glücklichern Zeitpunkt zu seiner Erscheinung treffen. Hr Le Dru hat aber diesen Gegenstand selbst nicht nur als Naturalist gründlich aus einander gesetzt, sondern er hat uns die Producte und Bewohner mehrerer Inseln genauer kennen gelehrt, von deren Reichthum wir zuvor nur sehr unvollkommen unterrichtet waren. Dieß ist der Fall mit Porto-Rico und der, wenn gleich nicht zu Westindien gehörigen, Insel Teneriffa. Um dem Leser diese Uebersetzung aber noch nützlicher zu machen, und ihr einen bedeutenden Vorzug zu geben, wird sie nicht nur das schätzbare Werk des Franzosen selbst durch verschiedene Zusätze aus größeren Werken erläutert enthalten, sondern ich will ihr eine allgemeine, aber bündige Uebersicht des Archipels von Westindien und seiner Producte beyfügen. Auf diese Weise wird man in den Stand gesetzt, die Größe des Umfangs des gesammten Handels mit diesen so unentbehrlich gewordenen Naturerzeugnissen genauer zu beurtheilen.

E. A. W. v. Zimmermann.

Ankündigung der

Reise nach Ostindien während der Jahre 1802, 1803, 1804, 1805 und 1806. Enthaltend die Beschreibung des Vorgebirges der guten Hoffnung, der Inseln Frankreich Bonaparte, Java, Banca, und der Stadt Batavia, nebst Bemerkungen über den Handel, die Produkte ihrer Länder, über die Sitten und die Gebräuche ihrer Bewohner u. s. w. nebst Karten und Kupfern von C. F. Tombe mit Anmerkungen von Sonnini und dem Herausgeber. 2 Bde. gr. 8.

Das Bedürfniß die reichen Kolonial Länder im Osten kennen zu lernen, nimmt bei uns stets zu, je mehr Interesse sie anjetzt durch die Fehde gegen ihre

Producte erhalten. Zugleich lehrt uns aber die traurige Erfahrung, daß auch in eben, ja in noch größerem Verhältnisse das Vermögen der Deutschen abnimmt, diese Kenntnisse durch Ankaufung einer so bedeutenden Anzahl zum Theil theurer Werke selbst nur in den Uebersetzungen zu befriedigen.

Dieß war die Ursache warum ich es mir bei der Uebersetzung von Tombe angelegen seyn ließ dasjenige besonders über die wichtigste holländische Besitzung, über Java aus den besten, neuesten Nachrichten hinzuzusetzen, was zu einer genauen Uebersicht und Schätzung dieser großen Sundinsel in Rücksicht der Länder, Produkten- und Völkerkunde nothwendig schien. Ein ähnlicher Fall wird in Rücksicht der Inseln Timor, ferner Frankreich der sogenannten Insel Bourbon eintreten, und selbst bei denjenigen Theilen von Borneo und Sumatra, welche der Verfasser auf eine zu kurze Zeit besuchte, soll das Wesentlichste nach andern neuern Reisenden ersetzt werden.

Daß auf die Weise diese Uebersetzung des Tombe lehrreicher als das Original ausfallen und zugleich manches andere Werk dem Leser gänzlich ersparen müsse, liegt in der Natur der Sache.

Man wird aber auch zugleich darauf sehen, daß dennoch das Werk nicht zu stark anlaufe und mithin zu kostbar ausfalle, ohne jedoch, von den Karten und Kupfern solche hinweg zu lassen, welche zur anschaulichen Kenntniß der Sache wesentlich gehören.

Diente diese patriotische Ansicht der Dinge zur gültigen Ursache die Uebersetzung der Baudinschen Reise durch eine allgemeine Darstellung von Westindien und seiner Kolonialwaaren dem deutschen Publikum nützlicher zu machen, so glaube ich, aus gleichen Gründen bewogen, der Uebersetzung des Tombe das Wesentlichste aus den neuesten besten Schriftstellern hinzuzusetzen, was besonders auf solche Länder von Ostindien die hierin durchgegangen werden, und ebenfalls an Kolonialwaaren vorzüglich reich sind Bezug hat. Dieß ist besonders der Fall bei Java. Da diese große Sundinsel seit Jahrhunderten das Hauptetablissement der Holländer in Ostindien war, so kann eine genauere Darstellung desselben nach den neuesten Nachrichten nicht anders als sehr willkommen seyn.

E. A. W. v. Zimmermann.

Ehrenberg, Fr., Reden über wichtige Gegenstände der höhern Lebenskunst, gr. 8. 1 Rthlr. 8 Gr.

Ehrenberg, Fr., Reden an Gebildete aus dem weiblichen Geschlechte. Zweite verbesserte, zum Theil ganz umgearbeitete Auflage. gr. 8. mit 1 Kupf. 2 Rthlr.

Ehrenberg, Fr., der Charakter und die Bestimmung des Mannes. Ein Gegenstück zu des Verfassers Reden an Gebildete aus dem weiblichen Geschlechte. gr. 8. mit 1 Kupf. 1 Rthlr. 20 Gr.

Ehrenberg, Fr., Handbuch für die ästhetische, moralische und religiöse Bildung des Lebens. Neue Auflage. gr. 8. 1 Rthlr. 20 Gr.

Ehrenberg, Fr., Euphranor. Ueber die Liebe. Ein Buch für die Freunde eines schönen, gebildeten und glücklichen Lebens gr. 8. 2 Thle. mit Kupfern. Zweite verbesserte und zum Theil ganz umgearbeitete Auflage. 3 Rthlr.

Ehrenberg, Fr., das Schicksal. gr. 8. 1 Rthlr. 8 Gr.

Ehrenberg, Fr., Festpredigten. gr. 8. 1 Rthlr. 20 Gr.

Eichholz, J. H. Dr., Darstellungen aus der Schweitz (Verfasser der neuen Briefe über Italien.) 8. mit 1 Kupf. 1 Rthlr.

Meißner, G. G., Charakterzüge aus dem Leben edler Geschäftsmänner und berühmter Kaufleute; zur Lehre und Nachahmung der merkantilischen Jugend. 8. 10 Gr.

Strickers, Joh. Heinr., kurze Erklärung des Buchhaltens, nebst Anweisung zur gründlichen Erlernung der einfachen Buchhaltung und einer Tabelle, welche den Werth mehrerer aus- und innländischen Rechnungsmünzen gegen Rthr. zu 1 5/6 Rthlr. anzeigt. gr. 4. 1 Rthlr.

Weddigen, P. F., geistliche Oden und Lieder, mit Müllerschen Compositionen für das Clavier; zweite sehr verbesserte und vermehrte Auflage. 8. 16 gGr.

Weißenstein, J., gründliche Unterweisung in der Handlungswissenschaft nach der Darstellung des

Herrn Professor Büsch in Hamburg. Zweite ganz umgearbeitete sehr vermehrte Auflage von Doctor Cleminius. gr. 8. 1 Rthlr.

Ewald, J. L., (Oberkirchenrath in Karlsruhe,) Gast- und Gelegenheitspredigten. gr. 8.

Kortum, K. A., (Der Arzn. Doct. und Bergarzt,) der Kaffee und seine Stellvertreter. 8. 8 Gr.

Eichholz, J. H., (in Verbindung mit mehrern deutschen Gelehrten und Dichtern herausgegeben) Blätter für Freunde des Wahren und Schönen. 8. 20 gGr.

Eylert, Rulem., Ein Schatz des Evangeliums, gefunden in dem dritten Kapitel des Propheten Zacharias, und allen Heilbegierigen mitgetheilt in 11 Betrachtungen. 1 Rthlr.

Des Herrn von Zimmermann unentbehrliche Hausmittel, oder medicinisches Noth- und Hülfsbüchlein für jedermann. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von seinem Freunde M....d. 8. 20 gGr.

Züge edler Liebe in Erzählungen nach wahren Geschichten. 8. 1 Rthlr. 8 gGr.

Benzenberg, H., biblische Entdeckungen, Bemerkungen und Ansichten. 16 gGr.

Borheck, Dr., Aug. Chr., Archiv für die Geschichte, Erdbeschreibung, Staatskunde und Alterthümer der deutschen Niederrheinlande. 1 Rthlr. 8 gGr.

Le Camûs Geschichte des Menschen nach seiner geistigen und körperlichen Natur, für jeden gebildeten Leser, nach dem Franz. frei bearbeitet vom Hofrath von Eicken.

Oder: Grundsätze der praktischen Seelenheilkunde für gebildete Leser aus allen Ständen. 1 Rthlr. 8 Gr.

Ehrenberg, Fr., Gedächtnißrede auf Ihre Majestät die verwittwete Königin von Preußen Louise Friederike. gr. 8. 3 gGr.

Desselben, Gastpredigt am dritten Advents-Sonntage in der Hof- und Domkirche zu Berlin gehalten. gr. 8. 4 gGr.

